I. megoldás. A feladatot megoldjuk, ha megkeressük

I. azokat az a és b pozitív egész számokat, amelyekre $b<99$, $\frac{a}{b}<\frac{19}{99}$ és $\frac{a}{b}$ az ilyen törtek közül a legnagyobb; illetve

II. azokat a c és d pozitív egész számokat, amelyekre $d<99$, $\frac{c}{d}>\frac{19}{99}$ és $\frac{c}{d}$ az ilyen törtek közül a legkisebb.

I. Vizsgáljuk a $D=\frac{19}{99}-\frac{a}{b}=\frac{19b-99a}{99b}>0$ különbséget!

Legyen először $19b-99a=1$. Ekkor $19b=99a+1$, amiből $b=5a+\frac{4a+1}{19}$.

Mivel $b<99$, azért a kisebb, mint 20. Így a számláló, a $4a+1$ értéke 19 páratlan többszöröseként 19 vagy 57. A 19 nem megfelelő, mivel 18 nem osztható 4-gyel. Így $4a+1=57$, $a=14$ és $b=73$, a tört pedig $\frac{14}{73}$.

Ebben az esetben $D=\frac{1}{99\cdot 73}$. Ez a legkisebb különbség, mivel ha D számlálója egynél nagyobb lenne, akkor a nevezőben csak 99-nél nagyobb b esetén lehetne a tört kevesebb, mint $\frac{1}{99\cdot 73}$.

II. Vizsgáljuk most is a $D=\frac{c}{d}-\frac{19}{99}=\frac{99c-19d}{99d}>0$ különbséget!

Legyen először $99c-19d=1$. Ekkor $19d=99c-1$, amiből $d=5c+\frac{4c-1}{19}$.

Mivel $d<99$, azért c kisebb, mint 20. Így a számláló, $4c-1$ értéke 19; 57 vagy 95. 57 nem megfelelő, mivel 18 nem osztható 4-gyel. 95 esetén $c=19$ és $d=100$, túl nagy. Így $4c-1=19$, $c=5$ és $d=26$.

Ebben az esetben $D=\frac{1}{99\cdot 26}$. Ha ennél kisebb különbséget keresünk, akkor ha D számlálója e, akkor d legalább $26e<99$. Emiatt a D számlálója legfeljebb 3.

Ha $99c-19d=2$, akkor $19d=99c-2$, amiből $d=5c+\frac{4c-2}{19}$. A fentiekhez hasonlóan ellenőrizhető, hogy csak a $4c-2=38$ a megoldás, amiből $c=10$ és $d=52$.

Ha $99c-19d=3$, akkor $19d=99c-3$, amiből $d=5c+\frac{4c-3}{19}$. Most csak a $4c-3=57$ a megoldás, amiből $c=15$ és $d=78$.

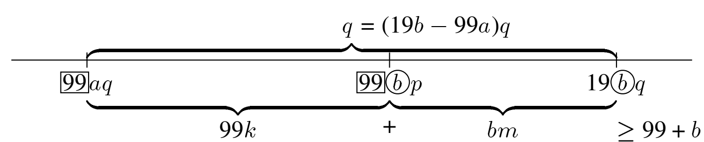
Mindhárom eredmény az $\frac{5}{26}$ törtet adja.

A feladat megoldása tehát: $\frac{14}{73}<x<\frac{5}{26}$ az a legbővebb (nyílt) intervallum, ahol a $\frac{19}{99}$ a legkisebb nevezőjű tört.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha $0<\frac{a}{b}<\frac{19}{99}$ és $19b-99a=1$, akkor az $\left(\frac{a}{b};\frac{19}{99}\right)$ intervallumban minden tört nevezője nagyobb 99-nél – valójában, mint látni fogjuk majd, $99+b$-nél is.

Legyen tehát $0<\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\frac{19}{99}$. A nevezőkkel szorozva $99aq<bp\cdot 99<19bq$. Így $q=19bq-99aq=19bq-99bp+99bp-99aq=(19q-99p)b+(bp-aq)\cdot 99\ge b+99$ (*1. ábra*).



1. ábra

Ugyanígy igazolható, hogy ha $\frac{19}{99}<\frac{c}{d}$ és $99c-19d=1$, akkor a $\left(\frac{19}{99};\frac{c}{d}\right)$ intervallumban minden tört nevezője nagyobb, mint $99+d$.

A megoldáshoz tehát meg kell keresnünk azt a legkisebb pozitív b, illetve d nevezőt, amelyre

$$19b-99a=1,\qquad \text{illetve}(1)99c-19d=1.(2)$$

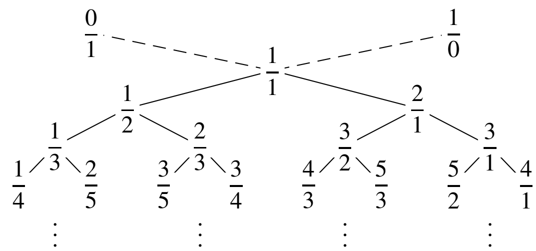
Ismeretes, hogy – mivel $(19,\ 99)=1$, a fenti egyenleteknek van, mégpedig pontosan egy olyan $(b,\ a)$, illetve $(d,\ c)$ megoldása, hogy $0<b<99$ és $0<a<19$, illetve $0<d<99$ és $0<c<19$, sőt, a $19b-99a=99c-19d$ egyenlőség átrendezésével kapott $19(d+b)=99(a+c)$ feltételből ezekre a minimális megoldásokra $d+b=99$ és $a+c=19$.

Az (1), (2) ún. diofantikus egyenletek megoldására több módszer ismeretes – az I. megoldásban valójában ezeket az egyenleteket oldotta meg a beküldő – és ezek bármelyikével $b=73$, tehát $d=99-73=26$, $a=14$, tehát $c=19-14=5$, a maximális intervallum pedig, amelyben $\frac{19}{99}$ a minimális nevezőjű tört, $\left(\frac{14}{73},\ \frac{5}{26}\right)$.

Megjegyzések. 1. A megoldásból kiderül, hogy a keresett intervallumban $\frac{19}{99}=\frac{14+5}{73+26}$, a két végpont, $\frac{14}{73}$ és $\frac{5}{26}$ úgynevezett mediánja. A mediánképzés segítségével a $0=\frac{0}{1}$ és az $1=\frac{1}{1}$ törtekből kiindulva a $[0,\ 1]$ intervallum bármely törtjéhez eljuthatunk, ezeket redukált – azaz egyszerűsített – alakban kapjuk, és minden $\frac{p}{q}$ tört a legbővebb olyan intervallum két végpontjának a mediánjaként áll elő, amelyben $\frac{p}{q}$ a minimális nevezőjű tört.

A konstrukció leírása megtalálható *Graham–Knuth–Patashnik:* Konkrét matematika (Műszaki Könyvkiadó, 1998) c. könyve 117–119. oldalán.

A fenti könyv 118. oldalán a konstrukciót megvalósító, ún. *Stern–Brocot*-fa kezdete látható (*2. ábra*).

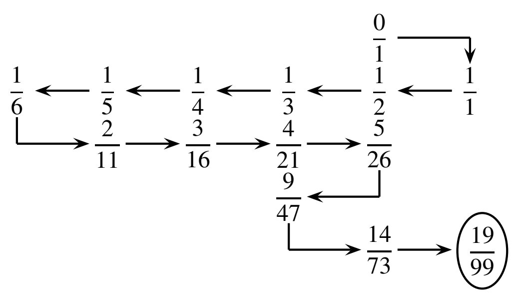


2. ábra

A fában az „$\frac{1}{0}$" szimbólum segítségével az 1-nél nagyobb törteket is megkapjuk. Ha úgy tetszik – mint ahogyan a margón olvasható „graffiti" mondja, $\frac{1}{0}$ értelmezhető a „végtelennek nem redukálható tört alakjában történő előállításaként". A fában minden tört az első balra, illetve jobbra felfelé útbaejtett szám mediánja.

A Stern–Brocot-fa felhasználásával oldotta meg a feladatot *Gerencsér Balázs* és *Kovács Erika Renáta* (mindketten a Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. osztályos tanulói). A hivatkozás után a feladat annyi, hogy a $\frac{19}{99}$ törtet kell megtalálni a fában. A két tört, amelynek mediánjaként megtaláltuk, határolja a keresett intervallumot.

Az alábbiakban Gerencsér Balázs ábrájának egy tipográfiailag módosított változatán mutatjuk be a $\frac{19}{99}$ felkutatását a fában. Induljunk el az egyik kezdőpontból, és mindig a $\frac{19}{99}$ felé lépjünk tovább: ha az éppen érintett szám nagyobb, mint $\frac{19}{99}$, akkor balra, ha pedig kisebb, akkor jobbra lépjünk a fában (*3. ábra*).



3. ábra

A $\frac{19}{99}$ a $\frac{14}{73}$ és az $\frac{5}{26}$ mediánjaként adódott, a keresett intervallum tehát $\left(\frac{14}{73}, \frac{5}{26}\right)$.

2. A redukált törtek fenti származtatásával áll szoros kapcsolatban a 0 és 1 közé eső törtek *Farey*-sorozatokba történő elrendezése. Erről olvashatunk többek között – a már idézett könyv 119–120. oldalán, továbbá a KöMaL 1999/1. és 2. számában megjelent *Holló-Szabó Ferenc:* A Riemann-függvényről című cikkében. N-edrendű Farey-sorozatnak nevezzük és $\mathcal{F}_N$-nel jelöljük a 0 és 1 közötti olyan redukált törtek növekvően rendezett sorozatát, amelyek nevezője nem nagyobb, mint N. Például

$$\mathcal{F}_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

$\mathcal{F}_N$-et megkapjuk, ha $\mathcal{F}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$-ből indulva mindannyiszor beszúrjuk a mediánokat, valahányszor a nevező nem nagyobb, mint N.

$\mathcal{F}_N$ bármely két szomszédos $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ elemére $cb-ad=1$, így a $\frac{19}{99}$-hez tartozó maximális intervallum két végpontja $\frac{19}{99}$ két szomszédja lesz az $\mathcal{F}_{99}$ sorozatban. *Gáspár-Merse Előd* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) ezzel a módszerrel kereste meg a szóban forgó intervallumot.