I. megoldás. Ha van olyan egyenes, amelyen a megadott síkok közül kettőnél több megy át, akkor a létrejövő térrészek száma 8 – ha a négy sík egy egyenesen megy át –, vagy 12, ha a síkok egyike metszi a másik három sík közös egyenesét.

Ha ilyen egyenes nincsen, akkor a síkok egyikét párhuzamosan eltolva létrejön egy újabb – korlátos – térrész: annak a tetraédernek a belseje, amelynek az eltolt sík és a másik három a négy lapsíkja.

Ennek a tetraédernek a lapsíkjai 15 részre osztják a teret, hiszen minden csúcshoz (4), élhez (6) és laphoz (4) csatlakozik egy-egy térrész, a 15-ödik rész pedig a tetraéder belseje.

Az eltolt síkot eredeti helyzetébe visszatolva ez a korlátos térrész megszűnik, a nem korlátos részek megmaradnak, így azt kapjuk, hogy a négy sík a teret legfeljebb 14 részre osztja.

Tóth Szilveszter (Tata, Eötvös J. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy n darab síkhoz egy $(n+1)$-ediket véve hogyan változik a térrészek száma. Ezt a síkot a meglévő n sík egy-egy egyenesben metszi; ez az n darab egyenes áthalad a síkok közös pontján (pontjain), és az $(n+1)$-edik síkot legfeljebb $2n$ részre osztja. E részek mindegyike pontosan egy új térrészt határol, így az $(n+1)$-edik sík fölvételével a térrészek száma legfeljebb $2n$-nel nő. Ez lehetséges is, ha az n darab egyenes között nincsenek azonosak, a tér bármely egyenesén legfeljebb kettő halad át a megadott síkok közül.

A fenti eredmény alapján kapjuk az alábbi táblázatot:

síkok száma (n)	térrészek szám
1	2
2	$2+2\cdot 1=$
3	$4+2\cdot 2=$
4	$8+2\cdot 3=$

Ezek szerint ha négy sík egy ponton halad át, akkor legfeljebb 14 részre osztja a teret.

Megjegyzések. 1. Az első megoldás pongyolábban, de nagyon szemléletesen is elmondható: tekintsünk egy tetraédert, illetve azt a 15 részt, amelyre a lapsíkok a teret osztják. Ha „nagyon" messzire távolodunk a tetraédertől, akkor az „pontta zsugorodik", a 14 darab nemkorlátos térrész viszont megmarad, így a feladat kérdésére a válasz 14.

2. Egy másik módszerrel is célhoz érhetünk. Írjunk a síkok közös pontja köré egy gömböt. Ezt a gömböt a síkok egy-egy főkörben metszik, amelyek a gömb felületét részekre osztják. Minden térrésznek pontosan egy ilyen tartomány felel meg a gömbfelületen.

A kérdés tehát úgy szól, hogy 4 darab főkör hány részre osztja a gömbfelületet. Ha a gömb olyan P pontjából, amelyen keresztül nem halad kör, a P-vel átellenes pontba húzott érintősíkra vetítjük a gömböt, akkor ismeretes, hogy a gömbfelület képe a teljes sík, a körök képe pedig kör. Így az eredeti kérdést átfogalmaztuk: legfeljebb hány részre osztja a síkot 4 körvonal. A két feladat tehát ekvivalens, az utóbbi formájában pedig jóval ismertebb.

3. A második megoldásban az $R_1=2$; $R_{n+1}=R_n+2n$ rekurziót kapjuk a létrejövő térrészek R_n számára, a rekurzió megoldása: $R_n=n^2-n+2$.