I. megoldás. Tudjuk, hogy ha egy n pozitív egész szám prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, akkor a szám pozitív osztóinak száma: $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$.

Egy számnak akkor lesz pontosan 6 különböző osztója, ha vagy

a) p_1^5 alakú, ahol p_1 prímszám, vagy

b) $p_1^2 \cdot p_2$ alakú, ahol p_1, p_2 különböző prímszámok.

Ha $p = 2$, akkor $N = p^2 + 11 = 15 = 3 \cdot 5$; egyik feltételnek sem tesz eleget, p tehát csak páratlan prímszám lehet.

Ha $p = 3$, akkor $N = 3^2 + 11 = 20 = 2^2 \cdot 5$ megfelel a *b)* feltételnek; a 20-nak valóban 6 különböző pozitív osztója van: 1, 2, 4, 5, 10 és 20.

Ha p páratlan és nem 3, akkor a négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot ad, hiszen $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Azért $N = p^2 + 11$ osztható 4-gyel. Ha most $N = p_1^5$, akkor p_1 csak 2 lehet, de $p^2 + 11 = 32$-ből p-re nem kapunk egész értéket. Az N tehát nem lehet p_1^5 alakú. Így $p_1^2 p_2$ alakú, és a 4-gyel való oszthatósága miatt $p_1 = 2$. De N 3-mal is osztható, mivel p^2 a 3-mal osztva is 1 maradékot ad (hiszen p vagy $3l + 1$, vagy $3l - 1$ alakú), azaz $p_2 = 3$. Vagyis $N = p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3 = 12$, és innen $p = 1$, ami nem prímszám.

A feladatnak tehát egyetlen megoldása a $p = 3$.

Gáthy Lajos (Fehérgyarmat, Zalka M. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$p^2 + 11 = (p-1)(p+1) + 12.$$

Ha $p > 3$, akkor $p - 1$ és $p + 1$ is páros és egyikük osztható 3-mal is, ezért szorzatuk osztható 12-vel is.

Továbbá $p^2 + 11 > 12$, ezért 7 különböző osztója is van, ezek 1, 2, 3, 4, 6 12 és $p^2 + 11$. Így p nem lehet 3-nál nagyobb.

Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15$, ennek csak 4 különböző pozitív osztója van.

Ha $p = 3$, akkor $p^2 + 11 = 20$, s ahogy már az előbb is láttuk, ennek 6 különböző pozitív osztója van, ez tehát az egyetlen megoldás.