Megmutatjuk, hogy legfeljebb 5 lépésben mindig eljuthatunk az $(1,\ 0,\ 0)$ számhármashoz.

Először abban az esetben oldjuk meg a feladatot, ha például b és c relatív prímek. Ekkor bármilyen szám, így az 1 is előállítható $a+xb+yc$ alakban, alkalmas x és y egész számokkal. Ezért két lépésben eljuthatunk az $(1,\ b,\ c)$ számhoz úgy, hogy a-hoz előbb b x-szeresét, majd c y-szorosát adjuk hozzá. Ezután további két triviális lépésben eljuthatunk az $(1,\ 0,\ 0)$ számhármashoz. Abban az esetben tehát, ha b és c relatív prímek, 4 lépés biztosan elegendő.

Most bebizonyítjuk, hogy egyetlen lépésben elérhető, hogy a számhármas két eleme relatív prím legyen.

Ha b vagy c nulla, akkor a másik két szám relatív prím.

Ha b és c egyike sem 0, akkor legyen d a c azon prímtényezőinek szorzata, amelyek nem osztják b-t. (Ha ilyen prímosztó nincs, akkor legyen $d=1$.) Azt állítjuk, hogy az egy lépésben előálló $(a,\ b+da,\ c)$ számhármas megfelelő, azaz $b+da$ és c relatív prímek. Tekintsük c egy tetszőleges p prímosztóját; azt kell igazolnunk, hogy ez nem osztója a $b+da$ számnak.

Ha p osztója b-nek, akkor d definíciója szerint p nem osztója d-nek. Azt is tudjuk, hogy a, b és c relatív prímek, tehát p az a-nak sem lehet osztója. Ebben az esetben tehát a $b+da$ összeg első tagja osztható p-vel, a második tagja nem.

Ha p nem osztója b-nek, akkor d definíciója szerint p osztója d-nek. Tehát a $b+da$ összeg első tagja nem osztható p-vel, a második tagja viszont osztható vele.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy p nem osztója a $b+da$ számnak.

Összefoglalva: egy lépésben elérhetjük, hogy a második és a harmadik szám relatív prím legyen, innen pedig további négy lépésben eljuthatunk az $(1,\ 0,\ 0)$ számhármashoz.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, 11. o.t.) dolgozata alapján