I. megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy $\frac{1}{16}$ és $\frac{1}{4}$ megoldásai az egyenletnek. Megmutatjuk, hogy más valós megoldás nincsen.

Mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, hiszen x pozitív:

$$\sqrt{x}\ln x = -\ln 2.$$

Tekintsük az $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ függvényt $(x>0)$. f differenciálható a pozitív számok halmazán, és a függvény deriváltja $f'(x)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$. Ha $0<x<e^{-2}$, akkor $f'(x)<0$; $f'(e^{-2})=0$, és ha $x>e^{-2}$, akkor $f'(x)>0$. Eszerint f szigorúan monoton fogyó, ha $0<x<e^{-2}$, és szigorúan monoton növő, ha $x>e^{-2}$.

Emiatt f egy adott értéket legfeljebb kétszer vehet föl, a talált megoldásokon kívül nincsen több; a feladatnak két megoldása van: $x_1=\frac{1}{16}$ és $x_2=\frac{1}{4}$.

Baharev Ali (Vác. Boronkay Gy. Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A helyes megoldásokban igen változatos helyettesítésekkel egyszerűsítették a vizsgálandó függvényt. Néhány példa: az $y=\sqrt{x}$ helyettesítéssel az $y^y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenletet kapjuk; ha $x=2^k$, akkor az egyenlet $k\cdot 2^{\frac{k}{2}}=-1$. Az alábbi megoldás meglepően egyszerű egyenletre jut.

II. megoldás. Ha $x>0$, akkor pontosan egy $t\in\mathbf{R}$ van, amelyre $x=2^{-2t}$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenlet a

$$\left(2^{-2t}\right)^{2^{-t}}=\frac{1}{2}$$

alakot ölti.
Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusára térve:

$$\begin{aligned} 2^{-t}\cdot\log_2 2^{-2t}&=-1, &&\text{azaz}\\ -t\cdot 2^{-t+1}&=-1, &&\text{vagyis}\\ t&=2^{t-1}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló függvény konvex, egy egyenes tehát legfeljebb két pontban metszi a grafikonját (*ábra*). Ha $t=1$ és $t=2$, akkor megoldást kapunk; innen $x_1=2^{-2}=\frac{1}{4}$, $x_2=2^{-4}=\frac{1}{16}$.

Az egyenlet megoldásai tehát $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{16}$.

Hargita Gábor (Ócsa, Bolyai J. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzés. *Venter György* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) az $x=\frac{1}{2^nA}$ $(n\geq 0$ egész, $1\leq A<2)$ helyettesítéssel oldja meg a feladatot. Először igazolja, hogy $n\leq 5$, majd esetszétválasztással találja meg a két megoldást.