Ha két kör és egy egyenes az *1. ábrán* látható módon érinti egymást, a körök sugarai R és r, az egyenesen lévő érintési pontok távolsága pedig d, akkor a körök középpontjai és az érintési pontok egy derékszögű trapézt alkotnak, amelynek oldalaira – a Pitagorasz-tételt alkalmazva – teljesül a $d^2 = 4Rr$ összefüggés.

Legyen a feladatunkban szereplő k_i kör és e érintési pontja E_i. A k_i kör definíciójából következik, hogy $i > 2$ esetén E_i az E_1E_{i-1} szakasz belső pontja. Ezért

$$E_1E_i = E_1E_{i+1} + E_{i+1}E_i.$$

Vagyis az érintési pontok közti távolságot a körök sugarainak segítségével kifejező, az előző bekezdésben bizonyított eredményt felhasználva

$$\sqrt{4r_1r_i} = \sqrt{4r_1r_{i+1}} + \sqrt{4r_{i+1}r_i},$$

és ezért

$$\sqrt{r_{i+1}} = \frac{\sqrt{r_1r_i}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_i}}.$$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy ebből az összefüggésből $\sqrt{r_{i+1}} = \dfrac{1}{i}$ következik. Állításunk $i = 1$ esetén igaz, mert $r_2 = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz, ha $2 \le i \le k$. Ekkor

$$\sqrt{r_{k+1}} = \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_k}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_k}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{k-1}}{1 + \frac{1}{k-1}} = \frac{1}{1 + (k-1)} = \frac{1}{k}.$$

Tehát $\sqrt{r_{i+1}} = \dfrac{1}{i}$ minden i-re igaz, ezért $r_{1999} = \dfrac{1}{1998^2}$.

Kiss Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)