Legyen az N egész szám kétféle felbontása:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = N,$$

ahol a, b, c, d pozitív egész számok, és például $a > c$, $d > b$.

Átrendezve és szorzattá alakítva az egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$(a + c)(a - c) = (d + b)(d - b).$$

A négy tényező paritása megegyezik, mert ha $(a + c)$ páratlan, akkor $(a - c)$ is az, tehát szorzatuk is páratlan, így a jobb oldali két tényező ugyancsak páratlan lesz. Vagyis ebben az esetben N-nek 4 különböző pozitív páratlan osztója van. Hasonló mondható el a páros esetre is. Könnyű olyan kis egész számot találni, amelynek 4 különböző páratlan pozitív osztója van. Ha felírjuk sorban az egész számokat, és megnézzük, melyiknek hány osztója van, rögtön láthatjuk, hogy $N = 15$ például ilyen; osztói: 1, 3, 5 és 15. Az osztók szorzatára az $1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ egyenlőség áll fenn.

Mivel $a + c > a - c$; $a + c = 15$, $a - c = 1$, ahonnan $a = 8$, $c = 7$. Továbbá $d + b > d - b$ miatt $d + b = 5$, $d - b = 3$, és innen $d = 4$, $b = 1$.

Valóban, $N = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2 = 65$ megoldás.

Most már csak azt kell igazolnunk, hogy 65 a legkisebb egész szám, amely eleget tesz a követelménynek.

Ehhez készítsük el az $x^2 + y^2$ összegek táblázatát $1 < x,\ y \leq 8$ esetére. A táblázatból leolvashatjuk, hogy a négyzetösszegek mind különbözők, kivéve az általunk már megkapott 65-öt.

Megjegyzés. A Gauss-egészek számelméletéből tudjuk, hogy az N szám pq alakú, ahol p és q a két legkisebb $4k + 1$ alakú pozitív prímszám, azaz $p = 3$, $q = 13$ és $N = 5 \cdot 13 = 65$.

y^2 \ x^2	1	4	9	16	25	36	49	64
1	2							
4	5	8						
9	10	13	18					
16	17	20	25	32				
25	26	29	34	41	50			
36	37	40	45	52	61	72		
49	50	53	58	$\boxed{65}$	74	85	98	
64	$\boxed{65}$	68	73	80	89	100	113	128