

A függvényegyenletet átírva a $g(x) = \log f(e^{-x})$ függvényre

$$(1) \quad g(g(x+y)) = g(x) + g(y).$$

Ezt felírva a 0 és $x+y$ számokra is,

$$(2) \quad g(x) + g(y) = g(g(x+y)) = g(g(0 + (x+y))) = g(0) + g(x+y).$$

Bevezetve a $h(x) = g(x) - g(0)$ függvényt, (2) a $h(x+y) = h(x) + h(y)$ alakba írható. A h függvény folytonos és additív, tehát $h(x) = ax$ egy alkalmas x valós számmal. A $g(0) = b$ jelöléssel $g(x) = ax + b$. Ezt visszahelyettesítve (1)-be

$$(3) \quad (a^2 - a)(x+y) + (a-1)b = 0,$$

ami kétféleképpen lehetséges: $a = 1$ és b tetszőleges valós szám, vagy $a = b = 0$. Az (1) egyenletnek ezek a megoldásai.

A megoldásokat visszaírva f -be, az első esetben

$$f(x) = e^{-g(\log x)} = \frac{e^{-b}}{x},$$

a második esetben

$$f(x) = 1.$$

A függvényegyenletnek tehát a konstans 1 és a $\frac{c}{x}$ alakú ($c > 0$) függvények tesznek eleget.

Megjegyzés. A megoldás hasonlóan megy akkor is, ha nem kötjük ki a folytonosságot, csak a h additív függvényt nem lehet olyan egyszerűen felírni. A (3) egyenlet helyett azt kapjuk, hogy tetszőleges x -re

$$(4) \quad h(h(x)) - h(x) = b - h(b).$$

Az $x = 0$ helyettesítésből $h(b) = b$ és $h(h(x)) = h(x)$, azaz h egy projekció. Könnyű ellenőrizni, hogy ez a két feltétel elégséges is, azaz (1) megoldásai a $g(x) = h(x+c)$ alakú függvények, ahol h tetszőleges projekció.