I. megoldás. Tekintsük az adott egyenletet y változójú másodfokú paraméteres egyenletnek. Ha a kétismeretlenes egyenletnek egyetlen számpár a megoldása, akkor a

$$7y^2 + (4x - 2)y + 2x^2 - 12x + N = 0$$

egyenletnek is csak egyetlen y_0 megoldása lehet, azaz a diszkriminánsa, $D_1 = 0$:

$$D_1 = (4x - 2)^2 - 28(2x^2 - 12x + N) = -40x^2 + 320x - 28N + 4 = 0, \qquad \text{rendezve} 10x^2 - 80x + (7N - 1) = 0.$$

Mivel az eredeti egyenletet csak egyetlen x_0 elégítette ki, azért ennek is csak egyetlen megoldása lehet, azaz diszkriminánsa, $D_2 = 0$:

$$D_2 = 80^2 - 40(7N - 1) = 0161 = 7N,$$

tehát $N = 23$.

Azt kaptuk, hogy ha az (1)-nek egyetlen $(x_0,\ y_0)$ megoldása van, akkor az N értéke 23 kell legyen. Meg kell azonban néznünk, hogy $N = 23$ esetén valóban kapunk-e megoldást: visszahelyettesítve $x = 4$ és $y = -1$ valóban az egyenlet megoldását adják.

Tehát (október) 23-án volt a felkelés.

Szilasi Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. Alakítsuk át az egyenletet az eredetivel ekvivalenssé:

$$2(x + y - 3)^2 + 5(y + 1)^2 + N - 23 = 0.$$

Ennek az egyenletnek pontosan akkor van egy megoldása, ha $N = 23$. Bevezethetjük ugyanis az új $x_1 = x + y - 3$, $y_1 = y + 1$ ismeretleneket, ezekre $x = x_1 - y_1 + 4$ és $y = y_1 - 1$, tehát az $(x,\ y)$ és $(x_1,\ y_1)$ számpárok megfeleltetése kölcsönösen egyértelmű. Az pedig világos, hogy a $2x_1^2 + 5y_1^2 = M$ egyenletnek páros sok megoldása van, ha $M \neq 0$, hiszen ha pl. $x_1 \neq 0$ egy megoldáshoz tartozik, akkor $-x_1$ is.

Megjegyzések. 1. Azok, akik nem vizsgálták meg, $N = 23$ esetén valóban van-e egyetlen megoldás, csak 3 pontot kaptak.

2. Az (1) egyenlet egyébként egy úgynevezett *másodrendű elliptikus görbe* egyenlete, amelynek csak akkor lesz egyetlen megoldása, ha a görbe *pontellipszis*, azaz ha mátrixának determinánsa 0. *Szilasi Zoltán* második megoldásában ebből számolta ki N értékét.