I. megoldás. Akkor nincsen fennakadás, ha bármeddig tekintjük is a sort, legalább annyian várakoznak 100 forintossal, mint 200 forintossal.

Jelöljük az előbbieket s, utóbbiakat pedig k betűvel, és számoljuk meg, hány olyan permutációja van a négy s és négy k betűnek, amikor nincsen fennakadás. Egy ilyen jó sorrendben az elsőnek érkező százassal, az utolsó pedig 200 forintossal kell fizessen, ezért egy tetszőleges jó sorrend s __ __ __ __ __ __ k alakú.

Csoportosítsuk a jó sorrendeket aszerint, hogy hányadik helyen áll az első néző, aki 200 forintossal akar fizetni. Ha ez K, akkor $2 \le K \le 5$.

(i) $K = 5$. Egyetlen ilyen sorrend van: $s\ s\ s\ s\ k\ k\ k\ k$, és ez nyilván jó.

(ii) $K = 4$: $s\ s\ s\ k$ __ __ __ k. A három lehetséges pozíció bármelyikére beírva a negyedik s betűt, jó sorrendhez jutunk, így ebben az esetben 3 jó sorrendet kapunk.

(iii) $K = 3$: $s\ s\ k$ __ __ __ __ k. A megmaradó két s betűt $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen írhatjuk a négy szabad pozíció közül kettőbe. E 6 sorrend közül csak 1 nem lesz jó, az, amikor a két s betű az utolsó két szabad pozíción van. Ebben az esetben tehát 5 jó sorrendet kapunk.

(iv) $K = 2$: $s\ k$ __ __ __ __ __ k. A harmadik pozícióra ezután csak s betű kerülhet, másképpen itt elakadna a sor: $s\ k\ s$ __ __ __ __ k. Így viszont lényegében az előző esethez, vagyis újabb 5 jó sorrendhez jutunk.

Minden lehetőséget megvizsgálva összesen 14 jó sorrendet kaptunk. Mivel a 8 pozícióból $\binom{8}{4} = 70$-féleképpen választhatjuk ki azt a négyet, ahol s betű áll, a pénztáros az összes sorrendek $\frac{14}{70} = \frac{1}{5}$-ében tudja csak fennakadás nélkül kiadni a jegyeket.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva most a „rossz” sorrendeket számoljuk össze. Az elakadás előtt egyenlő számú s és k betű szerepel, az elakadás helyén pedig k betű áll. Maga az elakadás így a $(2m+1)$-edik várakozónál következett be ($m = 1, 2, 3, 4$).

Módosítsuk most az ilyen sorozatokat a következőképpen: ha a $(2m+1)$-edik helyen kerül sor az elakadásra, akkor az első $(2m+1)$ pozíción az s betűket cseréljük k betűkre, a k betűket pedig s-ekre. Az elakadás utáni pozíciókon ne változtassuk a betűket.

$$s\,s\,k\,k\,k \mid \_\_\_\_ \quad \to \quad k\,k\,s\,s\,s \mid \_\_\_\_ .$$

Így olyan sorozathoz jutunk, amely 5 darab s és 3 darab k betűből áll. Megfordítva, ha tekintünk egy $(5s,\ 3k)$ sorozatot, akkor ebből egyértelműen kaphatunk egy rossz sorozatot: mivel több az s, mint a k, lesz egy legelső olyan pozíció, ahol az s betűk többségbe kerülnek, és erre valamelyik páratlanadik pozíción kerül sor. Az $s \leftrightarrow k$ cserét eddig a pozícióig bezárólag elvégezve egy rossz sorozathoz jutunk.

A rossz sorozatok száma így $\binom{8}{3} = 56$, a jó sorozatoké pedig $\binom{8}{4} - 56 = 14$.

Csötönyi Nóra (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A fenti leszámolásnak geometriai értelmezését is adhatjuk: egy-egy sorozatot az origóból induló töröttvonallal ábrázolhatunk: s betű esetén az $\mathbf{f}(1,\ 1)$, k betű esetén pedig az $\mathbf{l}(1,\ -1)$ vektorral lépünk tovább.

Így az origóból induló, a $(8;0)$ pontba érkező töröttvonalakat kapunk. Egy útvonal akkor rossz, ha érinti – vagy metszi – az $y = -1$ egyenest. A „rossz” töröttvonalaknak az $y = -1$ egyenessel való első közös pontjáig haladó vektorok között hajtsuk végre az $\mathbf{f} \leftrightarrow \mathbf{l}$ cserét, így az origóból induló $(8,\ 2)$ pontban végződő útvonalhoz jutunk. Ilyen útvonal pedig $\binom{8}{3}$ darab van.

2. A fenti „tükrözésnek” egy másik, szemléletesebb végrehajtása és az ennek megfelelő leszámolás a következő:

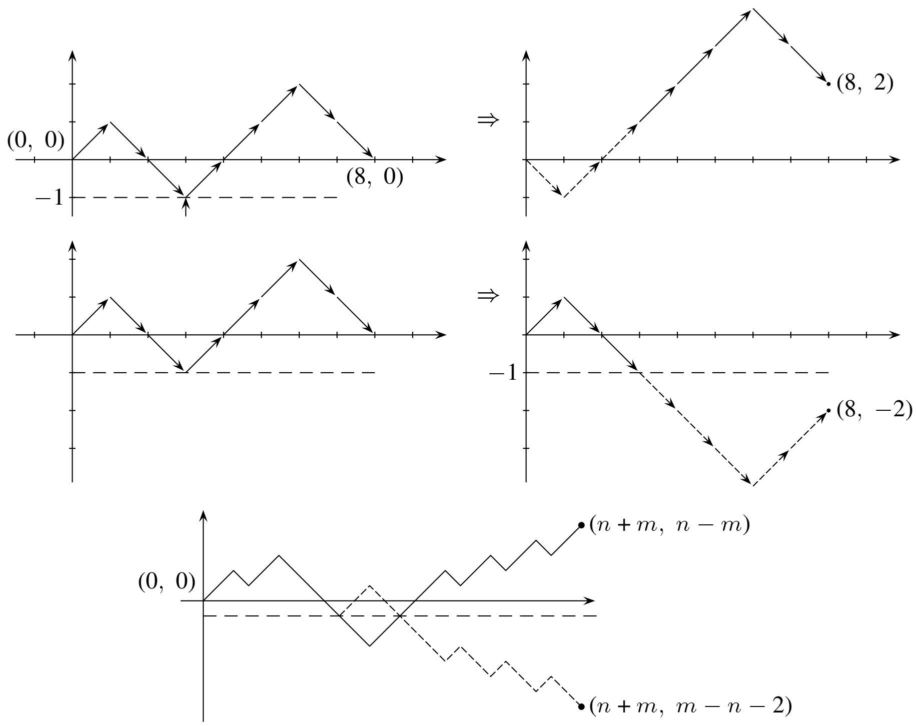
Tükrözzük egy $(0,\ 0) \to (8;0)$ rossz útvonalnak az $y = -1$ egyenessel való első közös pontja *utáni* részét az $y = -1$ egyenesre. Így a $(0,\ 0)$-ból induló $(8,\ -2)$-ben végződő $(3s,\ 5k)$ útvonalhoz jutunk. Megfordítva, minden ilyen útvonal nyilván metszi az $y = -1$ egyenest; az első közös pontra tükrözve az út további részét egy rossz sorozatot kapunk.

A rossz sorozatok száma tehát $\binom{8}{3}$.

3. Bármelyik fenti módszerrel kapjuk, hogy ha a pénztár előtt $2n$ darab vevő várakozik, az egyik felük 100, másik felük pedig 200 forinttal, akkor az összes sorrendek száma $\binom{2n}{n}$, a rosszaké pedig $\binom{2n}{n-1}$.

A pénztáros ilyenkor az összes sorrend $\frac{\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n+1}$-edrészében tudja fennakadás nélkül kiadni a jegyeket.

A tükrözéses módszerrel akkor is választ kapunk a feladat kérdésére, ha a 100 forintossal és 200 forintossal várakozók száma különböző. Ha n néző várakozik 100 forintossal és m 200 forintossal ($n \ge m$), akkor ugyanúgy kapjuk (*3. ábra*), hogy a rossz sorrendek száma $\binom{n+m}{m-1}$.



(0, 0)
−1
(8, 0)
⇒
(8, 2)
⇒
−1
(8, −2)
(0, 0)
(n + m, n − m)
(n + m, m − n − 2)