

*Alsó becslés:* Először becsüljük meg, hogy egy  $3 \times k$ -as téglalapnak legalább hány bejárása van:

$2^{k-1}$ -féleképpen lehet felosztani 3 magasságú téglalapokra a táblát. Minden ilyen felosztáshoz tartozik egy bejárás, amit úgy kapunk, hogy a 3 magasságú szeleteket „S”, illetve „Z” alakú úton járjuk be (1. ábra). Ezek mind különböző bejárások.

Vizsgáljuk most azt, hogy egy  $3 \times n$ -es táblát hányféleképpen lehet úgy bejárni, hogy az átellenes sarok az utolsó mező. Vegyük az első  $3 \times (n-2)$ -es részt. Ezt bejárjuk tetszőlegesen, az utolsó  $3 \times 2$ -es részben pedig úgy manőverezünk, hogy a megfelelő sarokba érkezzünk. Ez mindig lehetséges:

Az  $n \times n$ -es táblán elhelyezünk  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  kicsi táblát, amelyek  $3 \times n$ -esek. Ezeket sorban bejárjuk a fenti módon, majd az alul esetleg kimaradó 1–2 sort tetszőlegesen bejárjuk. Így  $t_n \geq 2^{(n-3)\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}$ , és

$$\sqrt[n^2]{2^{(n-3)\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}} \rightarrow \sqrt[3]{2} > 1,25.$$

*Felső becslés:* Tekintsünk egy adott bejárást. Két mezőt összekötünk, ha a bábu közöttük lépett egyet a bejárás közben. Tegyük fel, hogy csak a párosodik oszlopokban levő mezőkről tudjuk, mely mezőkkel vannak összekötve. Azt állítjuk, hogy ezek már meghatározzák a bejárást, ha még azt is tudjuk, melyik mezőn ér véget az útvonal.

*Bizonyítás:* Minden mezőről tudjuk, hogy egy vagy két mezővel van-e összekötve a négy (vagy kevesebb) szomszédja közül. Ha egy rögzített mező szomszédairól egyet kivéve tudjuk, melyikkel van összekötve, melyikkel nem, akkor a hiányzóról kikövetkeztethetjük, vele össze van-e kötve a rögzített mező. Így a páratlanodik oszlopok fentről lefelé haladva egyértelműen „kitölthetők”.

Még azt számoljuk ki, hogy legfeljebb hányféleképpen lehet egy oszlopot úgy megrajzolni, hogy a 2. ábra egy bejárásából származhasson.

A legfelső mező legfeljebb 3-féleképpen tölthető ki, mert 1 vagy 2 él megy belőle 2 vagy 3 szomszédba. Ha egy mező felett már kitöltöttük a többi, akkor legfeljebb 3 lehetőség marad erre a mezőre, a fentihez hasonlóan. A legalsó mezőnél már csak legfeljebb 2 eset lehetséges. Azaz egy oszlop szóba jövő kitöltéseinek száma  $2 \cdot 3^{n-1}$ .

(A fenti gondolatmenet akkor is működik, ha a kezdő vagy utolsó mező, aminek egy kimenő éle van, ebbe az oszlopba esik.)

Mivel  $n^2$ -féle lehet az utolsó mező, azért

$$n^2 \left( 3^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot (n-1)} \cdot 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \right) \geq t_n, \quad \sqrt[n^2]{t_n} \leq \sqrt[n^2]{n^2 \cdot 3^{\frac{n^2}{2}}}, \quad \text{és} \quad \sqrt[n^2]{n^2 \cdot 3^{\frac{n^2}{2}}} \rightarrow \sqrt{3} < 2.$$

*Megjegyzés.* A fenti bizonyítás a felső becslésre *Bérczi Gergely* ötlete alapján történt.

Az alsó becslést *Kun Gábor* ennél élesebbre is kihozta, a megoldásából

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} < \liminf_n \sqrt[n^2]{t_n}.$$

