Megjegyzés az F. 3288. feladathoz

F. 3288. *Legyenek n és k pozitív egészek és p prímszám úgy, hogy $p^k|n!$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n!$ osztható $(p!)^k$-nal is.*

A KöMaL 2000/1. számának 36–37. oldalán a fenti feladatra két megoldást is közöltünk. Amint arra *Kiss Gergely* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) felhívta a figyelmünket, az I. megoldás hibás, az állítás, amelyből az indukció kiindul, nem igaz. Abból ugyanis, hogy m a legkisebb olyan egész szám, amire $p^\ell \mid m!$, nem következik, hogy $m+p$ a legkisebb olyan pozitív egész, amelynek faktoriálisa $p^{\ell+1}$-nel osztható. A legegyszerűbb ellenpélda a $p=\ell=2$. Ekkor az a legkisebb m, amire $m!$ osztható 4-gyel, az $m=4$; és $4!$ osztható 2^3-nel is.

A megjelent hibás teljes indukciós bizonyítás helyett *Fried Ervin* az alábbi bizonyítást bocsátotta a lap rendelkezésére:

Legyen p rögzített prímszám, és jelölje $k(n)$ azt a legnagyobb kitevőt, amelyre $p^{k(n)}$ osztója $n!$-nak. Elég az állítást $k(n)$-re bizonyítani, hiszen $k<k(n)$ esetén $(p!)^k$ osztója $(p!)^{k(n)}$-nek. (Az eddigiek csak az egyszerűbb számolást szolgálják.)

Azt kell tehát bizonyítani, hogy $(p!)^{k(n)}$ osztója $n!$-nak. Ezt az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n=1$ esetben $k(1)=0$ következtében az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden n-nél kisebb természetes szám esetében, és vizsgáljuk $n!$-t. Ha p nem osztója n-nek, akkor $k(n-1)=k(n)$ miatt $(p!)^{k(n)}$ osztója $(n-1)!$-nak; így $n!$-nak is.

Legyen most $n=pm$. Mivel p prímszám, azért az $n!$-ban fellépő maximális p-hatvány megegyezik az $1\cdot p, 2\cdot p, \ldots, m\cdot p$ számok szorzatában fellépő maximális prímhatvánnyal. Ez a szorzat pontosan $p^m\cdot m!$. Így $k(pm)=m+k(m)$. Bontsuk fel most az $n!$-t $m+1$ tényező szorzatára. Az első m tényező a következő:

$$\begin{gathered}1\cdot 2\cdots(p-1),\\ \vdots\\ (ip+1)\cdot(ip+2)\cdots((i+1)p-1),\\ \vdots\\ ((m-1)p+1)\cdot((m-1)p+2)\cdots(mp-1).\end{gathered}$$

Ezen tényezők mindegyike osztható $(p-1)$ faktoriálissal, hiszen bármilyen t egész szám esetén t egymás utáni egész szám szorzata osztható $t!$-sal. Ez a szorzat tehát osztható a $(p-1)!^m$ számmal. A fennmaradó tényező a $p^m\cdot m!$ szorzat. A p^m tényezőt az előző szorzathoz hozzávéve egy olyan szorzatot kapunk, amely osztható $(p!)^m$-nel. Az indukciós feltevés és $m<n$ miatt $m!$ osztható $(p!)^{k(m)}$-nel. A már belátott $k(n)=m+k(m)$ összefüggésből következik az állítás.