Írjuk fel a tízes számrendszerbeli számot a szokásos módon

$$a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

alakban. Keressük az

$$\left(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0\right) k = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1}$$

egyenlet megoldásait, ahol k legalább 1 és legfeljebb 9, mivel a szám és megfordítottja ugyanannyi jegyet tartalmaz.

Legyen először $k = 1$, és rendezzük át az (1) egyenletet a következőképpen:

$$10^n(a_n - a_0) + 10^{n-1}(a_{n-1} - a_1) + \cdots + (a_0 - a_n) = 0.$$

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha valamennyi különbség 0, (mivel a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_0 mind pozitív és 10-nél kisebb egész, és 10-nek semelyik hatványa sem 0), azaz $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $\ldots$, vagyis a szám önmagának tükörképe. (Páratlan sok számjegy esetén a középső számjegyre tükrös, páros sok számjegy esetén a két középső jegy megegyezik.) Az ilyen számok ki is elégítik a feladat követelményét.

Megmutatjuk, hogy a feladatnak az előbbieken kívül csak $k = 4$ és $k = 9$ esetén van még megoldása.

Legyen $k = 4$, ekkor

$$(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}) \cdot 4 = a_0 a_1 \ldots a_n.$$

Itt a_n páros, és legfeljebb 2 lehet, és mivel $2 \cdot 4 = 8$, $a_0 = 8$ vagy esetleg 9. De ha $a_0 = 9$ lenne, akkor a 4-szerese nem végződhetne 2-re, ezért $a_0 = 8$, és így

$$\left(\overline{2a_{n-1} \ldots a_1 8}\right) \cdot 4 = \overline{8 \ldots 2}.$$

Ha $a_{n-1} = 3$ lenne, akkor $4 \cdot 23 > 90$; nem lehetséges. Így a_{n-1} vagy 0, vagy 1, vagy 2.

Az $\overline{a_1 8} \cdot 4$ szorzatban tetszőleges a_1 esetén a tízesek helyén mindig páratlan szám áll, ezért a_{n-1} csak 1 lehet.

$$\left(\overline{21 \ldots 8}\right) \cdot 4 = (8 \ldots 21).$$

Az a_1 csak 2 vagy 7 lehet, mert csak ezekre igaz, hogy a fenti szorzat 1-re végződik, mert $4 \cdot 2 + 3 = 11$, $4 \cdot 7 + 3 = 31$. De 2 nem állhat az utolsó előtti helyen, mert

$$\left(\overline{21 \ldots 28}\right) \cdot 4 = (82 \ldots 12)$$

esetén $4 \cdot 21 = 84 > 82$ lenne.

Marad az $a_1 = 7$, és a $2178 \cdot 4 = 8712$ négyjegyű szám valóban megoldás.

Most belátjuk, hogy ha 21 és 78 közé akárhány 9-est írunk, továbbra is jó megoldást kapunk.

Az eredeti szám: $21\underbrace{\ldots\ldots}_{k \text{ darab 9-es}}78$, megfordítottja: $87\underbrace{\ldots\ldots}_{k \text{ darab 9-es}}12$.

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$21\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ darab 9-es}}78 = 21 \cdot 10^{k+2} + 10^{k+2} - 10^2 + 78 = 22 \cdot 10^{k+2} - 22;$$

hasonlóképpen:

$$87\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ darab 9-es}}12 = 87 \cdot 10^{k+2} + 10^{k+2} - 10^2 + 12 = 88 \cdot 10^{k+2} - 88,$$

valóban a megfordított szám négyszerese az eredetinek.

A második esetben, ha $k = 9$, akkor a_n csak 1 lehet.

$$(\overline{1 \ldots 9}) \cdot 9 = (9 \ldots 1)$$

Az a_{n-1} lehet 1 vagy 0, de az $a_{n-1} = 1$ azt jelentené, hogy $9 \cdot a_1 + 8$ szám 1-re végződik; ilyen egész szám viszont nincs; ezért $a_{n-1} = 0$,

$$(10 \ldots 9) \cdot 9 = (9 \ldots 01),$$

ahonnan $a_1 = 8$ adódik. Valóban, $(1089) \cdot 9 = 9801$, ez a négyjegyű szám is megoldása a feladatnak.

Az előzőkhöz hasonlóan most is beláthatjuk, hogy 10 és 89 közé akárhány 9-est írva jó megoldást kapunk.

Vizsgáljunk meg a kimaradó esetek közül egyet; pl. $k = 3$-ra

$$(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}) \cdot 3 = (\overline{a_0 a_1 \ldots a_n});$$

a_n legfeljebb 3 lehet, és ha $a_n = 3$, akkor

$$(3a_{n-1} \ldots a_0) \cdot 3 = (a_0 a_1 \ldots 3).$$

Az a_0 csak 1 lehet $3a_0 = .\,3$ miatt, ami lehetetlen, mert az egyenlet jobb oldalán kisebb szám állna, mint a bal oldalon.

A többi esetet végigvizsgálva láthatjuk, hogy nincs másféle megoldása az (1) egyenletnek. A megoldások száma így is végtelen.

Megjegyzés. A feladat szövege szerint „keressük meg az összes pozitív számot…" a megoldók egy része elkezdte összeszámolni a megoldásokat. A kérdésre az is helyes válasz, hogy végtelen sok van (meg kell mondani persze, hogy „melyek ezek", milyen összefoglaló tulajdonsággal rendelkeznek a feladat feltételei következtében).