

Nevezzük az  $u$  és  $v$  szavakat ekvivalensnek, ha átalakíthatók egymásba egymásba a megadott lépésekkel, és jelöljük ezt  $u \sim v$ -vel. Ezen kívül jelentse  $uv$  az  $u$  és  $v$  szavak egyszerű egymás után írását.

**Lemma.** Ha az  $u$  szó mindhárom betűt tartalmazza,  $v$  pedig tetszőleges szó, akkor  $uvu \sim u$ .

A lemmát a  $v$  hossza szerinti indukcióval igazoljuk. Ha  $v$  az üres szó, akkor  $uvu = uu \sim u$ . Ha  $v$  egyetlen betűből áll, akkor ezt a feltétel szerint  $u$  tartalmazza:  $u = u_1vu_2$  alkalmas  $u_1$  és  $u_2$  szavakkal. Ekkor

$$uvu = u_1vu_2vu_1vu_2 \sim u_1vu_2vu_1vu_2vu_2 \sim u_1vu_2vu_2 \sim u_1vu_2 = u.$$

Tegyük most fel, hogy a lemma igaz  $k$ -nál rövidebb  $v$  esetén ( $k \geq 2$ ), és legyen  $v$  hossza  $k$ . Írjuk fel  $v$ -t  $v_1v_2$  alakban, ahol  $v_1$  és  $v_2$   $k$ -nál rövidebb szavak. Az indukciós feltevést alkalmazva az  $u$  és  $v_2$ , illetve  $v_2u$  és  $v_1$  szavakra  $uv_2u \sim u$ ,  $(v_2u)v_1(v_2u) \sim v_2u$  és

$$uvu = uv_1v_2u \sim (uv_2u)v_1v_2u = u(v_2u)v_1(v_2u) \sim u(v_2u) \sim u.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Ezután bebizonyítjuk a feladat állítását. Nyilván elég igazolni, hogy minden legalább 9 hosszúságú szó ekvivalens egy nála rövidebbel. Tekintsünk egy legalább kilencbetűs szót. Írjuk fel ezt  $uvw$  alakban, ahol  $u$  és  $w$  a szó első, illetve utolsó 4 betűjéből áll. Ha  $u$  vagy  $w$  valamelyike csak kétféle betűt tartalmaz, akkor vagy van benne egymás után két egyforma betű, vagy pedig kétféle betűt tartalmaz váltakozva. A szó mindkét esetben triviálisan rövidíthető: az első esetben az ismétlődő betűk egyikét hagyhatjuk el, a másik esetben a négybetűs szó két fele ugyanaz, ezért az egyik fele elhagyható. Feltételezhetjük tehát, hogy  $u$  és  $w$  is mindhárom fajta betűből tartalmaz legalább egyet. Ebben az esetben a lemma alapján  $uvw \sim u$  és  $wvw \sim w$ , ezért

$$uvw \sim uvvw \sim uw.$$

Az  $uvw$  szó tehát ekvivalens a nála rövidebb  $uw$  szóval.

*Kiss Gergely* (Fazekas M, Főv. Gyak. Gimn., 11. o.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Nem minden kilencbetűs szó rövidíthető triviálisan. Az  $AB$ -vel kezdődő kilencbetűs szavak között 18 olyan van, amiben nincs két egymás utáni megegyező részlet. A megoldók többsége ezekre az esetekre egy-egy egyedi megoldást adott.