Feltehető, hogy például $P(A) \le P(B)$. Mivel nyilván $P(AB) \le P(A)$, azért

$$P(AB) - P(A)P(B) \le P(A) - P(A)P(B) =$$
$$P(A)(1 - P(B)) \le P(B)(1 - P(B)) \le \left(\frac{P(B) + (1 - P(B))}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

a (kéttagú) számtani és mértani középre fennálló egyenlőtlenség szerint. Jelölje másrészt $\bar{A}$ az A esemény tagadását; ekkor $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Alkalmazzuk a már bebizonyított $P(XY) - P(X)P(Y) \le \frac{1}{4}$ egyenlőtlenséget az $X = B$, $Y = \bar{A}$ eseményekre:

(1) $$P(B\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) \le \frac{1}{4}.$$

A $B\bar{A}$ és BA egymást kizáró események, és $B\bar{A} + BA = B$, ezért $P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA)$. Így (1) szerint

$$\frac{1}{4} \ge P(B\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) = (P(B) - P(AB)) - (P(B) - P(B)P(A)) =$$
$$= P(A)P(B) - P(AB),$$

amit átrendezve:

$$P(AB) - P(A)P(B) \ge -\frac{1}{4},$$

bizonyítva a kívánt egyenlőtlenség másik felét.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.)

Megjegyzés. A bizonyított egyenlőtlenség éles: ha például $A = B$ az az esemény, hogy egy érmét feldobva „fejet" kapunk, akkor $P(AB) - P(A)P(B) = P(A) - P(A)^2 = \frac{1}{4}$. Ha B-nek viszont az A tagadását választjuk, akkor $P(AB) - P(A)P(B) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ teljesül.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.)