Közismert, hogy ha egy háromszög oldalai a, b, c. kerülete $2s$, területe T, beírt körének sugara ϱ, a hozzáírt kör sugarai pedig ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c, akkor

(1) $$\varrho \cdot s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c) = T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(A képletek bizonyításának vázlata a megoldás utáni *megjegyzésben* olvasható.)

Elegendő megmutatnunk, hogy a $\varrho_a \cdot \varrho_b = T$ és az $a^2+b^2=c^2$ egyenlőségek ekvivalensek. Az (1) összefüggések szerint

$$\varrho_a \cdot \varrho_b = \frac{T}{s-a} \cdot \frac{T}{s-b} = \frac{T^2}{(s-a)(s-b)} = s(s-c).$$

Látható, hogy $\varrho_a \cdot \varrho_b = T$ pontosan akkor teljesül, ha $s(s-c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, azaz ha

$$s(s-c) = (s-a)(s-b).$$

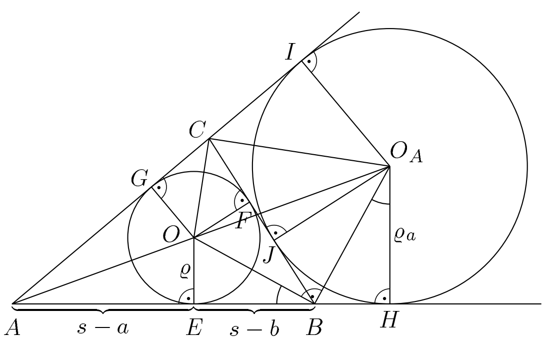
Mivel $2s = a+b+c$, azért ez ekvivalens az

$$(a+b+c)(a+b-c) = (c-a+b)(c+a-b)$$

egyenlőséggel. Elvégezve a szorzásokat

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2$$

adódik, amit rendezve és 2-vel osztva kapjuk az $a^2+b^2=c^2$ összefüggést. Ez éppen az, amit bizonyítani akartunk, hiszen egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.



Megjegyzés. A képletek bizonyításához használjuk az *ábra* jelöléseit. Az ABC háromszög területe megegyezik az OAB, OBC és OCA háromszögek területének összegével. A három kis háromszög mindegyikében ϱ az O-ból induló magasság, amiből $2T = c\cdot\varrho + b\cdot\varrho + a\cdot\varrho = 2\varrho s$ adódik. Ha az O_AAB és az O_AAC háromszögek területének összegéből kivonjuk az O_ABC háromszög területét, akkor szintén az ABC háromszög területét kapjuk. Az O_A-ból húzott mindhárom magasság ϱ_a, ezért $2T = c\cdot\varrho_a + b\cdot\varrho_a - a\cdot\varrho_a = 2\varrho_a(s-a)$. Ugyanígy látható be, hogy $\varrho_b(s-b) = T = \varrho_c(s-c)$.

Az OB egyenes az ABC háromszög B-hez tartozó belső-, O_AB pedig egyik külső szögfelezője, ezért $OBO_A\sphericalangle = 90°$. Tehát $OBE\sphericalangle = BO_AH\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így az OBE és a BO_AH derékszögű háromszögek hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők. Ezért a megfelelő oldalaik aránya is megegyezik:

(2) $$\frac{\varrho}{EB} = \frac{BH}{\varrho_a}.$$

Mivel egy körhöz egy külső pontból húzható két érintőszakasz hossza egyenlő, azért $AE=AG$, $BE=BF$ és $CF=CG$. Másrészt $AE+BE=c$, $BF+CF=a$ és $CG+AG=b$, amiből adódik, hogy pl. $BE=s-b$. Az $AI=AH$, $BH=BJ$, $CJ=CI$ és az $AH-BH=c$, $AI-CI=b$ és $BJ+CJ=a$ egyenlőségekből pedig pl. $BH=s-c$ következik. Vagyis a (2) egyenlőség szerint

$$\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}.$$

Felhasználva a $\varrho = \dfrac{T}{s}$ és a $\varrho_a = \dfrac{T}{s-a}$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\frac{T}{s(s-b)} = \frac{(s-c)(s-a)}{T},$$

amiből már egyszerűen adódik *Héron képlete:*

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$