Ha $a<-1$, akkor (1) negatív, tehát nem lehet négyzetszám. Ha $a=-1$ vagy $a=0$, akkor (1) értéke 0 illetve 1, vagyis négyzetszám. Ha $a=1$, akkor a nevező 0, és (1) nem értelmes. A továbbiakban feltételezzük, hogy $a\ge 2$.

$$\frac{a^{2000}-1}{a-1}=\left(a^{1000}+1\right)\cdot\left(a^{500}+1\right)\cdot\frac{a^{500}-1}{a-1}.$$

A három tényezőt rendre A, B, C-vel jelölve B és C osztója $A-2=\left(a^{1000}-1\right)$-nek, továbbá C osztója $B-2=\left(a^{500}-1\right)$-nek. Ebből következik, hogy az A, B és C közül bármelyik kettő legnagyobb közös osztója legfeljebb 2.

Három ilyen szám szorzata csak úgy lehet négyzetszám, ha mindegyikük külön-külön is négyzetszám vagy négyzetszám kétszerese. Az A és a B éppen 1-gyel nagyobbak az a^{1000} illetve a^{500} pozitív négyzetszámoknál, ezért nem lehetnek négyzetszámok.

Ha A és B is egy-egy négyzetszám kétszerese, akkor $4AB=4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{500}+4$ négyzetszám. Ez azonban nem lehetséges, mert

$$4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{500}+4>4a^{1500}+4a^{1000}+a^{500}=\left(2a^{750}+a^{250}\right)^2$$

és

$$4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{500}+4<4a^{1500}+4a^{1000}+4a^{750}+a^{500}+2a^{250}+1=(2a^{750}+a^{250}+1)^2,$$

vagyis $4AB$ két szomszédos négyzetszám közé esik.

Az $a>1$ esetben tehát (1) nem lehet négyzetszám. Összesen két megoldás van tehát: $a=-1$ és $a=0$.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Azt, hogy $a^{1000}+1$ és $a^{500}+1$ nem lehet egyszerre egy-egy négyzetszám kétszerese, ha $a>1$, másképpen is bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy $a^{1000}+1=2x^2$ és $a^{500}+1=2y^2$. Ekkor

$$a^{250}y=\sqrt{\frac{a^{1000}+a^{500}}{2}}>\sqrt{\frac{a^{1000}+1}{2}}=x.$$

Mivel egész számokról van szó, ebből következik, hogy

$$\sqrt{\frac{a^{1000}+a^{500}}{2}}\ge\sqrt{\frac{a^{1000}+1}{2}}+1>\frac{a^{500}}{\sqrt2}+1.$$

Négyzetre emelés és rendezés után azt kapjuk, hogy $a^{500}<-\dfrac{2}{2\sqrt2-1}<0$.

Varjú Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., 11. o.t.)