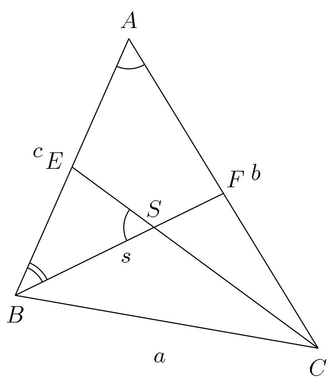
Az $AESF$ négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha $EAF\sphericalangle = 180^\circ - ESF\sphericalangle = ESB\sphericalangle$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a BAF és a BSE háromszögek hasonlóak, mert a két háromszögnek a B-nél lévő szöge közös. Emiatt a háromszögek hasonlóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a B-nél lévő oldalaik aránya megegyezzék, azaz teljesüljön a

(1) $$\frac{BE}{BS} = \frac{BF}{BA}$$

összefüggés.



Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokásos módon a, b, c-vel, a B-ből induló súlyvonal pedig legyen s. Ekkor $BE = \dfrac{c}{2}$ és $BS = \dfrac{2}{3}s$, tehát (1) így írható:

$$\frac{\frac{c}{2}}{\frac{2}{3}s} = \frac{s}{c}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{3}{4}c^2 = s^2.$$

Ismert (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. kötet, 292. feladat), hogy

$$s^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2).$$

Tehát $AESF$ pontosan akkor húrnégyszög, ha

$$\frac{3}{4}c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2).$$

Ezt átrendezve $b^2 + c^2 = 2a^2$ adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás.