I. megoldás. A valós számokra kiterjesztett $\tilde{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\tilde{f}(x)=2x^2+8x+7$ másodfokú függvény szigorúan monoton fogyó a $(-\infty,-2)$ intervallumon. Ugyanis például teljes négyzetté alakítás után adódik, hogy $\tilde{f}$ a minimumát az $x_0=-2$ helyen veszi föl, így az f függvény értelmezési tartományában minden x-hez pontosan egy $f(x)$, és minden $f(x)$ függvényértékhez pontosan egy x érték tartozik: az f kölcsönösen egyértelmű, így létezik az f^{-1} inverz (*1. ábra*).

Az inverz kapcsolat meghatározásához az

$$y=2x^2+8x+7$$

összefüggésből kell az x értékét az y segítségével kifejezni az x-nek a -2-nél kisebb értékeire. Kézenfekvő a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazni, eszerint nullára rendezés után

$$x_{1,\,2}=-2\pm\sqrt{\frac{1+y}{2}}.$$

Innen is látszik, hogy csak $y\ge -1$ esetben létezik olyan x, amelyre $\tilde{f}(x)=y$, az f értékkészlete a $(-1,\,+\infty)$ intervallum, ami f^{-1} értelmezési tartománya. Ilyen y értékek esetén viszont két olyan x van, amelyre $\tilde{f}(x)=y$, el kell döntenünk, hogy ezek közül melyik van f^{-1} értékkészletében, azaz f értelmezési tartományában, a $(-\infty,\,-2)$ intervallumban.

x_1 és x_2 a -2-re szimmetrikusan helyezkednek el (*2. ábra*). A két szám közül a kisebbik $x_1=-2-\sqrt{\frac{1+y}{2}}<-2$. Így az f inverze az $f^{-1}:(-1;+\infty)\to\mathbf{R}$, $f^{-1}:y\mapsto -2-\sqrt{\frac{1+y}{2}}$ függvény.

Megjegyzések. 1. A megoldásban f^{-1} megadásakor kényelmi szempontok miatt az y változót használtuk. Ennek természetesen semmi jelentősége, az utasításban épp így szerepelhetett volna a szokásos x, de bármilyen más változó is.

2. Bár nem tartozik a feladathoz, most az inverz függvény értékkészlete is rendelkezésre áll, így $f^{-1}:(-1;+\infty)\to(-\infty;-2)$.

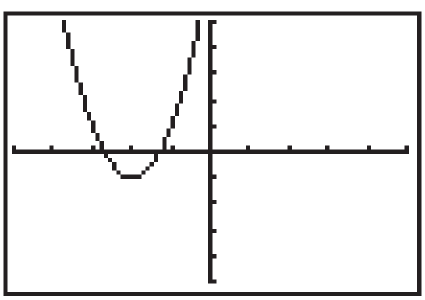
II. megoldás. Annak tisztázása után, hogy az f inverze létezik, grafikusan is megoldható a feladat. Ismeretes, hogy egy – kölcsönösen egyértelmű – f függvény inverzének a grafikonja az f grafikonjának a tükörképe az $y=x$ egyenesre. f és f^{-1} grafikonja látható a *3. ábrán*.

Az $\tilde{f}$ függvény grafikonjának, a teljes parabolának az egyenlete $y=2x^2+8x+7$. Ismeretes, hogy egy görbének az $y=x$ egyenesre vonatkozó tükörképének az egyenletét a változók $x\leftrightarrow y$ cseréjével kapjuk: $x=2y^2+8y+7$. Az inverz függvény grafikonja e görbének az $y=-2$ egyenes alatti része, ennek egyenlete:

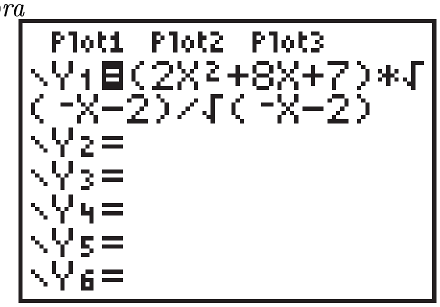
$$y=-2-\sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Az f függvény inverze tehát $f^{-1}:(-1;+\infty)\to\mathbf{R}$, $f^{-1}:x\mapsto -2-\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

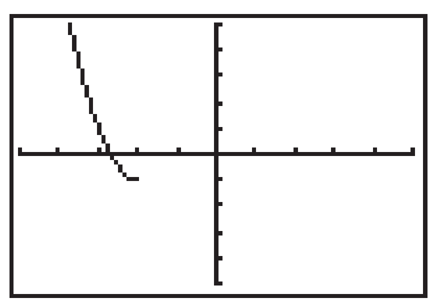
A *3. ábra* grafikonját, a függvénynek és inverzének képét legegyszerűbben grafikus számológéppel rajzolhatjuk fel. Ha beírjuk az $y=2x^2+8x+7$ függvényt, a **TI83** grafikus kijelzőjén az alábbi látható (*1. ábra*):



1. ábra



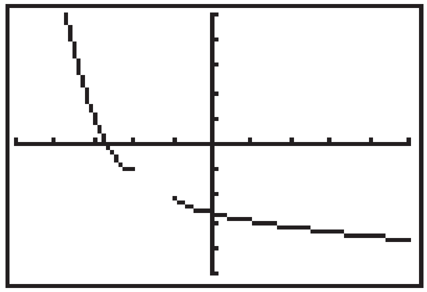
2. ábra



3. ábra

Kis trükkel elérhető, hogy az értelmezési tartományt leszűkítsük: beszoroztunk $\frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x-2}}$-vel: a gyökjel alatt csak $x<-2$ esetén áll pozitív szám, egyébként a függvény nem értelmezett (*2–3. ábra*).

Ezután csak egy gombnyomás: DrawInv Y1, és megkaptuk a függvény inverzének a képét is (*4. ábra*).



4. ábra

III. megoldás. Ismeretes, hogy ha f_1 és f_2 két kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor az $f_1 \circ f_2$ összetett függvény is kölcsönösen egyértelmű, és az inverze a komponensek inverzeiből kapható, ha azokat fordított sorrendben fűzzük össze:

$$(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_2^{-1}.$$

Hétköznapibb nyelven ez azt jelenti, hogy egy több lépésből álló műveletsor megfordítását a legutolsó művelet megfordításával kell elkezdenünk. Ez az ún. „zokni–cipő-elv”; az elnevezés remélhetőleg nem szorul magyarázatra.

Tekintsük most az alábbi függvényeket:

$$f_1(x) = x + 2; \qquad f_2(x) = -x; \qquad f_3(x) = x^2, \quad x > 0; \qquad f_4(x) = 2x - 1.$$

Mivel az f függvényutasítás teljes négyzet alakja $f(x) = 2[-(x+2)]^2 - 1$, így

$$f : x \overset{f_1}{\mapsto} x + 2 \overset{f_2}{\mapsto} -(x+2) \overset{f_3}{\mapsto} [-(x+2)]^2 \overset{f_4}{\mapsto} 2[-(x+2)]^2 - 1,$$

azaz $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

A komponensekről látható, hogy kölcsönösen egyértelműek, inverzeik rendre

$$f_1^{-1}(x) = -2 + x; \qquad f_2^{-1}(x) = -x; \qquad f_3^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0; \qquad f_4^{-1} = \frac{x+1}{2}.$$

Az f inverze így $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}$, azaz

$$f^{-1} : x \overset{f_4^{-1}}{\mapsto} \frac{x+1}{2} \overset{f_3^{-1}}{\mapsto} \sqrt{\frac{x+1}{2}} \overset{f_2^{-1}}{\mapsto} -\sqrt{\frac{x+1}{2}} \overset{f_1^{-1}}{\mapsto} -2 + \left(-\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right),$$

tehát $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$. A függvény értelmezési tartománya pedig az f értékkészlete, a $(-1; +\infty)$ intervallum.

Megjegyzés. A feladatra sok hibás és hiányos megoldás érkezett. Eltekintve a szóhasználat felületességétől – többen a függvényt vélték tükrözni, nem pedig a grafikont – a legkirívóbb hiba az I. megoldás másodfokú egyenletének formális, hibás eredménye, $-2 \pm \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ mint az inverz függvényutasítás. A feladat megoldásainak áttekintése jó alkalom lehet minden olvasónknak a függvényekkel kapcsolatos fogalmak: értelmezési tartomány, értékkészlet, összetett függvény, egyenlet, grafikon, inverz stb. átgondolására.