I. megoldás. Legyen a körlap sugara R. Ha egy átmérő mentén vágjuk ketté a kört, akkor a kúp alapkörének kerülete egyenlő a félkör kerületével, vagyis $2r\pi = R\pi$, ahonnan $r = \dfrac{R}{2}$ az alapkör sugara, a kúpok magassága pedig

$$m = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

A kúp kétszeres térfogata

$$V = 2\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi \frac{R}{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{R^3\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4330127 \cdot \frac{R^3\pi}{3}.$$

Vágjuk fel ezután két tetszőleges sugár mentén a körlapot, és készítsük el a két tölcsért. A két kúp alapkörének sugara r_1 és r_2.

$$i_1 = \frac{R\pi\alpha}{180^\circ}, \qquad \text{ahonnan} \qquad r_1 = \frac{R\alpha}{360^\circ} i_2 = 2R\pi - i_1, \qquad \text{ahonnan} \qquad r_2 = R\left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right).$$

Legyen $\dfrac{\alpha}{360^\circ} = x$ $(0 < x < 1)$, és írjuk fel a térfogatok összegét x függvényként.

$$r_1 = Rx, \qquad m_1 = \sqrt{R^2 - (Rx)^2} = R\sqrt{1 - x^2},$$
$$V_1 = \frac{(Rx)^2\pi \cdot R\sqrt{1 - x^2}}{3} = \frac{R^3\pi}{3}\left(x^2\sqrt{1 - x^2}\right),$$
$$r_2 = R(1 - x), \qquad m_2 = \sqrt{R^2 - R^2(1 - x)^2} = R\sqrt{1 - (1 - x)^2} = R\sqrt{2x - x^2}.$$
$$V_2 = \frac{R^2(1 - x)^2\pi \cdot R\sqrt{2x - x^2}}{3} = \frac{R^3\pi}{3}\left((1 - x)^2\sqrt{2x - x^2}\right).$$
$$V_1 + V_2 = \frac{R^3\pi}{3}\left(x^2\sqrt{1 - x^2} + (1 - x)^2\sqrt{2x - x^2}\right).$$

$\dfrac{R^3\pi}{3}$ pozitív állandó, így a maximum keresésekor elegendő vizsgálni az

$$f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2} + (1 - x)^2\sqrt{2x - x^2}$$

függvényt.

Láttuk, hogy az $f(x)$ függvény értéke az $\alpha = 180^\circ$, azaz $x = 0,5$ értékére $0,4330127$.

Azt kell eldöntenünk, van-e a függvénynek a $(0,\ 1)$ intervallumban ennél nagyobb értéke. A függvény ábrázolásához készíthetünk táblázatot, s ha a $0,5$ környezetét vizsgáljuk, hamarosan találni fogunk nagyobb értéket.

Legyen például $x = 0,3$, azaz $\alpha \approx 108^\circ$, ekkor

$$f(0,3) = 0,3^2\sqrt{1 - 0,3^2} + (1 - 0,3)^2\sqrt{0,6 - 0,3^2} \approx 0,435779,$$

ami azt jelenti, hogy a körcikkekből formált tölcsérek össztérfogata nem félkörök esetén lesz a legnagyobb.

Megjegyzés. A feladat kérdésére tagadó választ adhatunk akkor, ha találunk egy olyan szétvágást, amelynél a keletkezett térfogatok összege nagyobb, mint a felezéskor kapott kúpok térfogatának összege. A megoldók nagy része ezt az utat választotta.

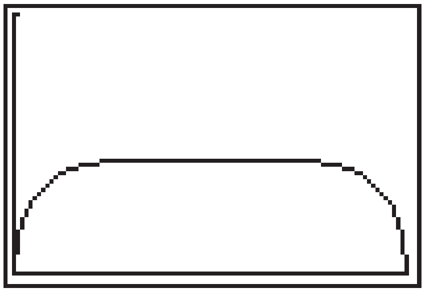
Többen azonban abba a hibába estek, hogy kiválasztottak egy felosztást, majd a kapott térfogatok összegét kisebbnek találva a felezéskor kapott térfogatnál, kijelentették, hogy valóban a felezéskor kapott térfogatok összege a legnagyobb. Látható a különbség: az állítás cáfolatához egyetlen példa elegendő, a bizonyításhoz azonban egyáltalán nem.

II. megoldás. A feladatot úgy is befejezhetjük, hogy az I. megoldás $f(x)$ függvényének megkeressük a maximumát. Csakhogy középiskolában tanult módszerekkel nemigen tudunk mit kezdeni a fenti $f(x)$ függvénnyel.

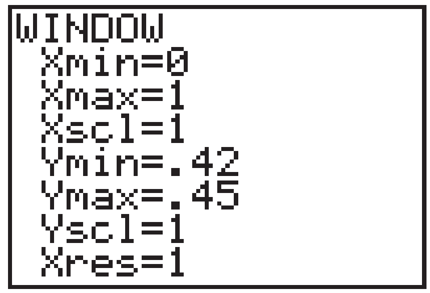
Nézzük meg, hogyan oldható meg a feladat a **Texas Instruments** TI83 típusú grafikus számológépének segítségével:

Az *1. ábra* standard koordináta-rendszerben mutatja a függvény kirajzolt grafikonját. Látható, hogy az $x = \dfrac{1}{2}$ igen nagy környezetében mintha azonos lenne a függvényérték. Ha az $\left(\dfrac{1}{2}; f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ pontra „zoom”-olunk, akkor egy lényegében vízszintes görbeszakaszt kapunk, a függvény olyan keveset változik, hogy ez nem elegendő a döntéshez: vajon $\dfrac{1}{2}$-nél van-e a maximum?

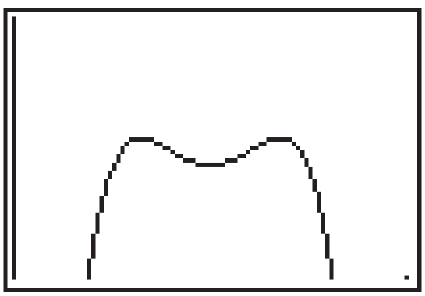
A grafikus megoldás kulcslépése a *2. ábrán* látható: változtassuk meg az y koordinátatengely skálázását! Ekkor egyetlen gombnyomás után leolvasható a tagadó válasz (*3. ábra*), kiderül, hogy a függvény „középen behorpad”, a függvény nem az egyenlő sugarak esetén maximális.



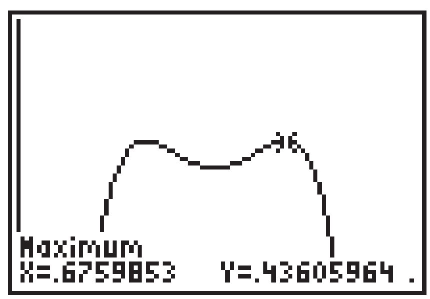
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Az már csak ráadás, hogy a kalkulátor a lokális maximumok értékét is meg tudja adni, ez látható a *4. ábrán*.

Mivel a számológép kerekítési hibáit is figyelembe kell vennünk, ajánlatos számolással újra ellenőriznünk, hogy $x = 0,5$ esetén valóban kisebb a függvényérték, mint $x = 0,675$ közelében.