I. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha c gyöke az $f(x)=x^3-3x-1=0$ egyenletnek, akkor $-\frac{c+1}{c}$ és $-\frac{1}{c+1}$ is gyökök. Valóban, a $c^3-3c-1=0$ összefüggés felhasználásával

$$\left(-\frac{c+1}{c}\right)^3-3\left(-\frac{c+1}{c}\right)-1=-\frac{1}{c^3}\left((c+1)^3-3c^2(c+1)+c^3\right)=$$
$$=-\frac{1}{c^3}(-c^3+3c+1)=\frac{1}{c^3}(c^3-3c-1)=0,$$

és

$$\left(-\frac{1}{c+1}\right)^3-3\left(-\frac{1}{c+1}\right)-1=-\frac{1}{(c+1)^3}\left(1-3(c+1)^2+(c+1)^3\right)=$$
$$=-\frac{1}{(c+1)^3}\left(c^3-3c-1\right)=0.$$

A $-\frac{c+1}{c}$ és $-\frac{1}{c+1}$ gyökök különbözők, mivel ellenkező esetben $(c+1)^2=c$, azaz $c^2+c+1=0$; ilyen c valós szám azonban nincsen.

Mivel $f(1)=-3<0<1=f(2)$, azért az egyenletnek létezik olyan c gyöke, amelyre $1<c<2$. Ekkor a $-\frac{c+1}{c}$, $-\frac{1}{c+1}$ gyökök negatívak, így $x_3=c$. Másrészt

$$-\frac{1}{c+1}=-\frac{c+1}{(c+1)^2}=-\frac{c+1}{c+(c^2+c+1)}>-\frac{c+1}{c},$$

tehát $x_1=-\frac{c+1}{c}$ és $x_2=-\frac{1}{c+1}$. Ezért

$$x_3^2-x_2^2-x_3+x_1=c^2-\frac{1}{(c+1)^2}-c-\frac{c+1}{c}=$$
$$=\frac{c^3(c^2+2c+1)-c-c^2(c^2+2c+1)-(c+1)^3}{c(c+1)^2}=\frac{c^5+c^4-2c^3-4c^2-4c-1}{c(c+1)^2}=$$
$$=\frac{(c^2+c+1)(c^3-3c-1)}{c(c+1)^2}=0.$$

Nagy Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. A Viète-formulákat használjuk: $x^3-3x-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ szerint

$$x_1+x_2+x_3=0,(1)x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3,(2)x_1x_2x_3=1.(3)$$

Az (1)-ből és (3)-ból $x_1x_2(x_1+x_2)=-1$, azaz

$$x_2^2x_1+x_2x_1^2+1=0,\quad \text{hasonlóan}(4)x_3^2x_1+x_3x_1^2+1=0.(5)$$

Mivel $x_1<x_2<x_3$ és $x_1+x_2+x_3=0$, azért $x_1<0$, így $x_2<x_3$ szerint (4)-ből és (5)-ből

$$x_2=\frac{-x_1^2+\sqrt{x_1^4-4x_1}}{2x_1},\qquad x_3=\frac{-x_1^2-\sqrt{x_1^4-4x_1}}{2x_1}.$$

Tehát

$$x_3^2-x_2^2-x_3+x_1=\frac{4x_1^2\sqrt{x_1^4-4x_1}}{4x_1^2}+\frac{x_1^2+\sqrt{x_1^4-4x_1}}{2x_1}+x_1=$$
$$=\frac{(2x_1+1)\sqrt{x_1^4-4x_1}+3x_1^2}{2x_1};$$

ez pontosan akkor nulla, ha

$$3x_1^2=-(2x_1+1)\sqrt{x_1^4-4x_1}. \tag{6}$$

Tegyük fel, hogy (6) jobb oldala negatív, azaz $x_1>-\frac{1}{2}$. Ekkor $x_2>x_1>-\frac{1}{2}$, ezért $x_3=-(x_1+x_2)<1$, ami nem lehet, hiszen az I. megoldásban láttuk, hogy az egyenlet legnagyobb gyöke nagyobb, mint 1. Így (6) ekvivalens a két oldal négyzetének egyenlőségével:

$$9x_1^4=(2x_1+1)^2x_1(x_1^3-4)=(2x_1+1)^2x_1(3x_1-3),$$

$$9(3x_1+1)=9x_1^3=3(4x_1^2+4x_1+1)(x_1-1),$$
$$9x_1+3=4x_1^3-3x_1-1,$$
$$0=4(x_1^3-3x_1-1),$$

ami valóban igaz; ezért a feladat által kívánt összefüggés is teljesül.

Balka Richárd (Sárvár, Tinódi Sebestyén Gimn., 11. o.t.)

Megjegyzés. A harmadfokú egyenlet gyökeit előállító *Cardano-képlet* segítségével az egyenlet gyökei „pontosan” is meghatározhatók: $x_1=2\cos 220°$, $x_2=2\cos 100°$, $x_3=2\cos 20°$. Ezután a feladat állítása a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós formulák felhasználásával igazolható.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 11. o.t.)