A feladat kérdésére a válasz nemleges. Először megmutatjuk, hogy egy négyzetszám (pozitív) osztóinak a száma mindig páratlan. Ehhez az osztókat párba állítjuk: ha $d \mid t^2$, akkor d osztópárja legyen $e = \dfrac{t^2}{d}$; nyilván e párja a d. Az egy párba tartozó két osztó akkor és csak akkor egyenlő, ha $e = d$, azaz $t^2 = d^2$, vagyis $d = t$. Tehát az osztók párba állításánál egyetlen osztónak, a szám négyzetgyökének nem jut (tőle különböző) pár, így az osztók száma valóban páratlan.

Legyen ezután $t = 3^\ell \cdot m$, ahol m nem osztható 3-mal; ekkor t^2-nek a $(3k+1)$ alakú és a $(3k+2)$ alakú osztói együttesen éppen az m^2 osztóit adják. Ezek száma páratlan lévén, a $(3k+1)$ és a $(3k+2)$ alakú osztók száma szükségképpen különböző.

Megjegyzések. 1. Két $(3k+1)$ alakú és két $(3k+2)$ alakú szám szorzata is $(3k+1)$ alakú, míg egy $(3k+1)$ és egy $(3k+2)$ alakú számot összeszorozva $(3k+2)$ alakú számhoz jutunk. Így (a közölt megoldás jelöléseit használva) ha m prímtényezős felbontása $m = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$, akkor $m^2 = p_1^{2a_1} \cdot \dots \cdot p_r^{2a_r}$ osztói azok a $d = p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_r^{b_r}$ alakú számok, amelyekre $0 \le b_i \le 2a_i$ teljesül minden $i = 1, 2, \dots, r$-re; a d pontosan akkor $(3k+1)$ alakú, ha a $(3k+2)$ alakú p_j prímek b_j kitevőinek összege páros.

Legyen f az m^2-nek tetszőleges $(3k+2)$ alakú osztója, és jelölje p_j azt a $(3k+2)$ alakú prímet, amelyre b_j páratlan és j minimális. Ekkor ($b_j < 2a_j$ miatt) $p_j f \mid m^2$, és $p_j f$ nyilván $(3k+1)$ alakú. Ezzel minden $(3k+2)$ alakú osztóhoz hozzárendeltünk egy $(3k+1)$ alakú osztót, mégpedig különböző osztókhoz különbözőket. Az is világos, hogy m^2-nek létezik olyan $(3k+1)$ alakú osztója, amely nem áll elő ezen a módon, pl. az 1 ilyen. Ezzel azt is megmutattuk, hogy $(3k+1)$ alakú osztó több van, mint $(3k+2)$ alakú.

2. A szóbanforgó osztók számának különbségét ki is számolhatjuk az m^2 prímtényezős felbontásából: jelölje (az egyszerűség kedvéért) $p_1, p_2, \dots, p_c$ az m^2 összes $(3k+2)$ alakú prímosztóját. Tetszőleges n természetes számra jelölje rendre $S_1(n)$ és $S_2(n)$ az n $(3k+1)$, illetve $(3k+2)$ alakú osztóinak a számát, legyen továbbá $S(n) = S_1(n) - S_2(n)$. Ha $m^2 = a^2 b^2$, ahol $a^2 = \prod_{j=1}^{c} p_i^{2a_i}$, $b^2 = \prod_{j=c+1}^{r} p_j^{2a_j}$, akkor $S_i(m^2) = S_i(a^2) D(b^2)$, ahol D a megfelelő szám összes osztóinak számát jelöli. Legyen $a^2 = x^2 y^2$, $(x, y) = 1$, ekkor $S(a^2) = S_1(a^2) - S_2(a^2) = (S_1(x^2)S_1(y^2)) + S_2(x^2)S_2(y^2)) - (S_1(x^2)S_2(y^2) + S_2(x^2)S_1(y^2)) = S(x^2)S(y^2)$.

Ennek ismételt alkalmazásaival kapjuk, hogy

$$S(a^2) = \prod_{j=1}^{c} S\left(p_i^{2a_i}\right).$$

Végül, mivel $p_j^{2a_j}$ $(3k+1)$ alakú osztói $1, p_j^2, \dots, p_j^{2a_j}$, azért $S(p_j^{2a_j}) = (a_j+1) - a_j = 1$, tehát $S(a^2) = 1$, így

$$S(m^2) = S_1(m^2) - S_2(m^2) = S(a^2)D(b^2) = D(b^2) = \prod_{j=c+1}^{r} (2a_j + 1) > 0.$$

Dénes Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 12. o.t.)