A két egyenes metszéspontját jelöljük O-val. Húzzunk P-n keresztül az egyenesekre merőlegeseket, legyenek ezek AD és BC az *1. ábra* szerint. Irányított szögekkel számolunk.

$$XPA\sphericalangle\sphericalangle + CPY\sphericalangle = \\ = YPD\sphericalangle + CPY\sphericalangle = CPD\sphericalangle,$$

ami az X, Y-tól független állandó, jelöljük az értékét γ-val. (Nyilván $COA\sphericalangle = CPD\sphericalangle = \gamma$, mivel merőleges szárú szögek.)

Jelöljük az XPA szöget δ-val, ekkor tehát $CPY\sphericalangle = \gamma - \delta$, és az XAP, PCY derékszögű háromszögekből

$$PX = \frac{AP}{\cos\delta}, \qquad PY = \frac{CP}{\cos(\gamma - \delta)}.$$

Így $PX \cdot PY = \dfrac{AP \cdot CP}{\cos\delta \cdot \cos(\gamma-\delta)}$ pontosan akkor minimális, ha $\cos\delta \cdot \cos(\gamma - \delta)$ maximális. Mivel $\cos\delta \cdot \cos(\gamma - \delta) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\gamma + \cos(2\delta - \gamma)\right)$, azért

$$\cos\delta \cdot \cos(\gamma - \delta) \le \frac{1}{2}(\cos\gamma + 1)$$

és egyenlőség lehetséges, ha $\delta = \dfrac{\gamma}{2}$. A szerkesztendő pontokat tehát a CPD szög belső szögfelezője metszi ki az O csúcsszög száraiból. A szerkesztést ezzel egy szög felezésére vezettük vissza. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha P az X, Y által meghatározott szögtartomány külső pontja (*2. ábra*), illetve ha az XOY szög tompaszög.

Pach Péter Pál (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) *Sipos Ádám* (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. o.t.) és Soproni Péter(Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.) dolgozatai alapján