Nyilván b nem lehet 0 és -1; beszorozva $b(b+1)$-gyel

$$(a+1)(b+1)=cab. \tag{1}$$

Ha $a=0$, akkor (1)-ből $b=-1$ következozok, ezt pedig kizártuk; így $a\neq 0$. Ha $a=-1$, akkor $0=cab=-cb$ miatt $c=0$, azaz $a=-1$, $c=0$ tetszőleges (0-tól és -1-től különböző) b-vel megoldás. A továbbiakban feltesszük, hogy (b-hez hasonlóan) $a\notin\{-1;0\}$.

Az (1) jobb oldala osztható a-val, így $a\mid(a+1)(b+1)$. Mivel a és $a+1$ relatív prímek, azért $a\mid b+1$ és hasonlóan $b\mid a+1$.

I. Ha $a,\ b>-1$, akkor a és b pozitív, így az iménti oszthatóságokból $a\le b+1$ és $b\le a+1$ következik. Ekkor $a\le b+1\le a+2$, ezért b csak $a-1$, a vagy $a+1$ lehet.

Ha $b=a-1$, akkor $b\mid a+1$ miatt $\dfrac{a+1}{a-1}\ge 2$, azaz $a\le 3$; ebben az esetben a következő megoldásokat kapjuk: $a=2$, $b=1$, $c=3$ és $a=3$, $b=2$, $c=2$. Ha $b=a$, akkor hasonlóan $\dfrac{a+1}{a}\ge 2$ miatt $a\le 1$, ebből az $a=b=1$, $c=4$ megoldást kapjuk. Ha pedig $b=a+1$, akkor a $b=a-1$ esetben kapott megoldásokhoz jutunk a és b szerepét felcserélve: $a=1$, $b=2$, $c=3$ és $a=2$, $b=3$, $c=2$.

II. Ha $a<-1$ és $b>-1$, akkor $b>0$, így $a\mid b+1$ szerint $-a\le b+1$ és $b\mid a+1$ miatt $b\le -a-1$; ezért $-a\le b+1\le -a-1+1=-a$, azaz $b=-a-1$. Az egyenletbe visszahelyettesítve ekkor az

$$a=t,\qquad b=-t-1,\qquad c=1\qquad (t<-1)$$

megoldásokat kapjuk. Hasonlóan, az $a>-1>b$ esetben az

$$a=t,\qquad b=-t-1,\qquad c=1\qquad (t>0)$$

megoldásokhoz jutunk.

Megmutatjuk, hogy az eddigieken kívül nincs több megoldás. A még hátralévő $a,\ b<-1$ esetben ugyanis $a\mid b+1$ miatt $a\ge b+1$, és $b\mid a+1$ miatt $b\ge a+1$, tehát $a\ge b+1\ge a+2$, ami lehetetlen.

Siroki László (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.) *Venter György* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)