I. megoldás. Tekintsünk egy páratlan prímszámot. Legyen ez a $2k+1$. Ekkor $(2k+1)^k$ a feltételnek megfelelő szám. Ennek ugyanis $k+1$ darab osztója van: 1, $2k+1$, $(2k+1)^2$, $\ldots$, $(2k+1)^k$. Prímtényezős felbontása $(2k+1)^k$, és ha az alapból kivonjuk a kitevőt, éppen $(k+1)$-et, az osztók számát kapjuk. Ez bármelyik $(2k+1)$ alakú prímszám k-adik hatványára igaz. Mivel végtelen sok prímszám van (ezt könnyen igazolhatjuk indirekt módon), és közülük csak egy páros, így végtelen sok páratlan prím is van. Ezért végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő természetes szám van.

Jelitai Kálmán (Budapest, Szent István Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Mutatunk egy módszert, amellyel végtelen sok, a feladat feltételének eleget tevő számot készíthetünk. Válasszunk olyan p_1 és p_2 prímszámokat, amelyek 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot adnak, azaz $p_1 \equiv 3 \pmod 3$ és $p_2 \equiv -1 \pmod 3$ teljesül. Ismeretes, hogy végtelen sok ilyen p_1 és p_2 prímszám létezik. Következik ez például *Dirichlet* tételéből, hiszen ez annak csak speciális esete (Erdős Pál–Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996., 67. o.). Tekintsük ezután a $k=\dfrac{p_1p_2-2}{3}$ számot, ez nyilván egész. Megmutatjuk, hogy a $p_1 \cdot p_2^k$ szám eleget tesz a feladat feltételének. Ezek osztói: 1, p_2, p_2^2, $\ldots$, p_2^k, p_1, p_1p_2, $\ldots$, $p_1p_2^k$; ezek száma $2(k+1)$, vagyis $2\left(\dfrac{p_1p_2-2}{3}+1\right)$, ami pedig valóban egyenlő $p_1p_2-\dfrac{p_1p_2-2}{3}$-mal.

A feladat állítását ezzel beláttuk.

Baharev Ali (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 12. o.t.)