I. megoldás. Legyen a CF szakasz felezőpontja O. Mivel S_1 és S_2 súlypontok, azért harmadolják a súlyvonalakat, vagyis az OA_1, illetve az OB szakaszokat is. Ebből következik, hogy S_1S_2 párhuzamos AB-vel, és $S_1S_2 = \frac{1}{3}AB$. Alkalmazzuk *Menelaosz tételét* (bizonyítását lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye, I. kötet, 1260. feladat) az AFC háromszögre és a BP_2 egyenesre:

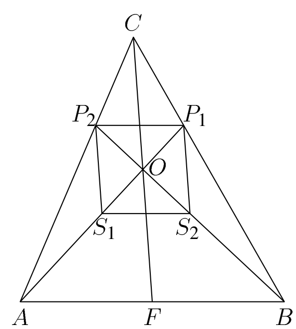
$$\frac{CP_2}{P_2A}\cdot\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FO}{OC} = -1.$$

F az AB, O pedig az FC szakasz felezőpontja, ezért az előző összefüggésből $\frac{AB}{BF} = -2$ és $\frac{FO}{OC} = 1$ miatt $\frac{CP_2}{P_2A} = \frac{1}{2}$ következik, vagyis P_2 az AC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja. Ugyanígy kapjuk, hogy P_1 a BC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja, ha Menelaosz tételét a BFC háromszögre és az AP_1 egyenesre alkalmazzuk. Ez viszont azt jelenti, hogy az AB szakaszt C-ből $\frac{1}{3}$ arányban kicsinyítve a P_2P_1 szakaszt kapjuk. Ezért $P_2P_1 \parallel AB \parallel S_1S_2$ és $P_2P_1 = \frac{1}{3}AB = S_1S_2$. Tehát az $S_1S_2P_1P_2$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

Szilágyi Örs (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen a CF szakasz O felezőpontjából A-ba mutató vektor $6\mathbf{a}$, B-be mutató vektor pedig $6\mathbf{b}$. Mivel F az AB felezőpontja, azért $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = 3\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; O pedig a CF felezőpontja, ezért $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OF} = -3\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. Az OA, illetve OB szakaszok súlyvonalak, amit a megfelelő súlypontok harmadolnak, ezért

$$\overrightarrow{OS_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{a} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OS_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = 2\mathbf{b}.$$



A CA szakasz C-hez közelebbi H_2 harmadolópontjába mutató vektor az ismert képlet szerint:

$$\overrightarrow{OH_2} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}(-6\mathbf{a}-6\mathbf{b}+6\mathbf{a}) = -2\mathbf{b}.$$

Vagyis $\overrightarrow{OH_2} = -\overrightarrow{OS_2}$, ami azt jelenti, hogy H_2 rajta van az OS_2 egyenesen is, ezért megegyezik OS_2 és AC metszéspontjával, vagyis P_2-vel. Tehát $\overrightarrow{OP_2} = -2\mathbf{b}$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $\overrightarrow{OP_1} = -2\mathbf{a}$. Vagyis $\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OS_1}$ és $\overrightarrow{OP_2} = -\overrightarrow{OS_2}$, tehát az $S_1S_2P_1P_2$ négyszögnek O szimmetriaiközéppontja. Ezért a négyszög paralelogramma.