I. megoldás. A válasz: nem. Megadunk olyan, a feltételeknek megfelelő f és g függvényeket, amelyekre $f+g$ nem veszi fel a 0-t.

Legyen $f(x)=x$. Ez nyilván szigorúan monoton nő, és értékkészlete a teljes $\mathbf{Q}$.

Legyen

$$g(x) = x-3, ha$$

x≤ 1; -2 $\frac{}{x,ha}$1<x<2; $x-3, ha$x≥ 2.

A g függvény a $(-\infty,1]$, $(1,2)$ és $[2,\infty)$ intervallumokban külön-külön szigorúan monoton nő, e három intervallumra megszorítva értékkészlete a $(-\infty,-2]$, $(-2,-1)$, illetve $[-1,\infty)$ intervallumok racionális elemeiből áll. Ezért igaz, hogy g szigorúan monoton nő, és értékkészlete a teljes $\mathbf{Q}$.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $x\in\mathbf{Q}$, amelyre $f(x)+g(x)=0$. Ha $x\le 1$ vagy $x\ge 2$, akkor $f(x)+g(x)=2x-3$, ami csak $x=\dfrac{3}{2}$ esetén lenne 0, de ez a szám nem szerepel a megadott intervallumokban.

Ha $1<x<2$, akkor

$$f(x)+g(x) = x-\frac{2}{x} = 0,$$
$$x^2 = 2.$$

Ez pedig nem lehetséges, mert ilyen x racionális szám nincs.

Tehát $f+g$ nem veszi fel a 0-t.

Máthé András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

II. megoldás. Legyen ismét $f(x)=x$. Konstruálunk egy olyan g függvényt, amely szigorúan monoton nő, értékkészlete a teljes $\mathbf{Q}$, és $f+g$ nem veszi fel a 0-t.

Legyen (a_n) egy racionális számokból álló, szigorúan növekvő sorozat, amely $\sqrt{2}$-höz tart; (b_n) pedig legyen egy ugyancsak racionális számokból álló és $\sqrt{2}$-höz tartó, de szigorúan monoton csökkenő sorozat. Ilyen sorozatot készíthetünk pl. a $\sqrt{2}=1,414213\ldots$ tizedesjegyeiből, pl. $a_1=1$; $a_2=1{,}4$; $a_3=1{,}41$; $a_4=1,414$; $\ldots$, illetve $b_1=2$; $b_2=1,5$; $b_3=1,42$; $b_4=1,415$; $\ldots$.

Tetszőleges pozitív egész n esetén legyen $g(a_n)=-b_n$ és $g(b_n)=-a_n$. Az $[a_n,a_{n+1}]$ és $[b_{n+1},b_n]$ intervallumokban legyen g lineáris. $x<a_1$ és $x>b_1$ esetén legyen $g(x)=x-a_1-b_1$. Ez a függvény a $(-\infty,\sqrt{2})$, illetve $(\sqrt{2},\infty)$ intervallumokon egymáshoz kapcsolódó lineáris szakaszokból áll, a két fél grafikon a $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ponthoz torlódik.

A függvény értékkészlete a $[-a_{n+1},-a_n]$ és $[-b_n,-b_{n+1}]$ $(n=1,2,\ldots)$ valamint a $(-\infty,-b_1]$ és $[-a_1,\infty)$ intervallumok racionális elemeiből áll. Az intervallumok uniója a $-\sqrt{2}$ kivételével az összes valós számot, és ezáltal az összes racionális számot tartalmazza. A g függvény értékkészlete tehát a teljes $\mathbf{Q}$.

Ha $x<\sqrt{2}$, akkor $g(x)<-\sqrt{2}$ és $f(x)+g(x)<\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$. Ha pedig $x>\sqrt{2}$, akkor $g(x)>-\sqrt{2}$ és $f(x)+g(x)>\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$. Ezért az $f+g$ függvény valóban nem veszi fel a 0-t.

Zábrádi Gergely (Győr, Révai M. Gimn. 12. o.) dolgozata alapján