Írjuk le a labda mozgását az „álló” (a lemezjátszó dobozához rögzített) koordináta-rendszerből nézve. Jelöljük a labda tömegközéppontjának sebességét $\vec{v}$-vel, gyorsulását $\vec{a}$-val, a labda forgási szögsebességét $\vec{\omega}$-val, szöggyorsulását $\vec{\beta}$-val, a síklap által kifejtett súrlódási erőt pedig $\vec{S}$-sel. Ezek a mennyiségek vízszintes irányú vektorok. (A labda függőleges tengely körül is foroghat, ha kezdetben volt ilyen irányú szögsebessége, de ez a mozgás független a többitől, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk vele.) Érdemes bevezetni még két további jelölést: labda középpontjából a legalsó pontjába lefelé mutató $\vec{r}$ vektort, valamint a korong $\vec{\Omega}$ szögsebesség-vektorát. (Mindkét vektor függőleges irányú és időben állandó.)

Ezekkel a vektormennyiségekkel tömör alakban felírhatjuk az m tömegű, Θ tehetetlenségi nyomatékú labda mozgásegyenleteit. A dinamika alaptörvénye szerint

$$\vec{S} = m\vec{a}, \tag{1}$$

a forgómozgás alaptörvénye szerint pedig

$$\vec{r} \times \vec{S} = \Theta\vec{\beta}. \tag{2}$$

A labda tisztán gördül a síklapon, legalsó pontjának sebessége tehát ugyanakkora, mint az érintkezésnél a síklap megfelelő (a lemezjátszó tengelyétől kiinduló $\vec{R}$ vektorral jellemzett) pontjának sebessége. Mivel a labda legalsó pontjának sebessége a tömegközéppont $\vec{v}$ sebességének és a forgásból származó $\vec{\omega} \times \vec{r}$ kerületi sebességnek összege, a síklap megfelelő pontjának sebessége pedig $\vec{\Omega} \times \vec{R}$, a csúszásmentes gördülés feltétele:

$$\vec{v} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{R}. \tag{3}$$

Képezzük a (3) egyenletben szereplő mennyiségek változási sebességét! Mivel $\vec{\Omega}$ és $\vec{r}$ időben állandó vektorok, $\vec{R}$ változási sebessége pedig éppen a labda $\vec{v}$ sebességvektora, írhatjuk, hogy

$$\vec{a} + (\vec{\beta} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{v}. \tag{4}$$

Fejezzük ki (1)-ből az $\vec{S}$ vektort és helyettesítsük be (2)-be, majd onnan fejezzük ki $\vec{\beta}$-t és írjuk be (4)-be:

$$\vec{a} + \frac{m}{\Theta}[(\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{r}] = \vec{\Omega} \times \vec{v}. \tag{5}$$

A szögletes zárójelben álló vektor $\vec{a}$ és $\vec{r}$ merőlegessége miatt $r^2 \cdot \vec{a}$ (ahol r a labda sugara), továbbá $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$ felhasználásával (5) ilyen alakra hozható:

$$\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{a} = \vec{\Omega} \times \vec{v}, \qquad \text{azaz} \qquad \vec{a} = \frac{2}{7}\vec{\Omega} \times \vec{v}. \tag{6}$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a labda sebességvektora $\frac{2}{7}\Omega$ szögsebességgel *egyenletesen* forog körbe, a labda tömegközéppontja tehát ilyen szögsebességű egyenletes körmozgást végez. A körpálya középpontja általában *nem* esik egybe a lemezjátszó tányérjának közepével, hanem a kezdőfeltételektől (az indítás helyétől és a kezdősebességtől) függően máshol is lehet.

Megjegyzések: 1. Vigyázat: a merev testek térbeli forgómozgásának egyenlete általában nem olyan „egyszerű”, mint ahogy az a (2) egyenletben szerepel, hanem csak a perdület vektorának változási sebességével fogalmazható meg. Jelen esetben (a labda gömbszimmetriája miatt) a perdület $\Theta \cdot \vec{\omega}$ alakú, s ennek változási sebessége (mivel Θ nem csak a testhez rögzített rendszerből, de az inerciarendszerből nézve is állandó) $\Theta\vec{\beta}$.

2. A labda tömegközépponti szögsebességének és a lemezjátszó szögsebességének aránya a jelen esetben (tömör, homogén lábdánál) $\frac{2}{7}$, általában pedig $\frac{\Theta}{\Theta + mr^2}$. Vékonyfalú labdánál (teniszlabda, pingponglabda) például $\Theta = \frac{2}{3}mr^2$, ilyenkor a legnagyobb a két szögsebesség aránya, nevezetesen $\frac{2}{5}$.

(G. P.)