

Először belátjuk, hogy ha a körök metszik egymást, akkor a négyszög húrnégyszög. A konvex négyszög átlói metszik egymást, ezért az  $AC$  és  $BD$  átlók felező merőlegesei is: legyen ezek közös pontja  $O$ . Jelölje a feladatban szereplő  $AC$  átmérőjű kört  $k_1$ , a  $BD$  átmérőjű kört pedig  $k_2$ .

Ha az  $O$  pontot összekötjük a  $k_1$ , illetve a  $k_2$  körök pontjaival, egy-egy forgáskúpot kapunk. Az  $O$ -t a  $k_1$  és  $k_2$  metszéspontjaival összekötő szakaszok mindkét forgáskúpnak alkotói, tehát a két forgáskúp alkotói egyenlő hosszúságúak. (Ha  $O$  egybeesik valamelyik átló felezőpontjával, akkor az egyik (esetleg mindkét) forgáskúp alkotója helyett a  $k_1$ , illetve a  $k_2$  kör sugara értendő.) A  $k_1$  és  $k_2$  körök pontjai tehát egyenlő távolságra vannak  $O$ -tól, így van olyan  $O$  középpontú gömb, amelyen  $k_1$  és  $k_2$  összes pontja, tehát  $A, B, C, D$  is rajta van.

$A, B, C, D$  e gömb különböző, egy síkban levő pontjai, és mivel a gömb minden síkmetszete kör, azért van olyan kör, amelyen mind a négy pont rajta van. Így az  $ABCD$  négyszög valóban húrnégyszög.

Most bebizonyítjuk, hogy ha az  $ABCD$  négyszög húrnégyszög, akkor a  $k_1$  és  $k_2$  körök metszik egymást. Használjuk az eddigi jelöléseket, és legyen  $\mathcal{S}$  az  $ABCD$  húrnégyszög síkja. Az  $O$  középpontú,  $OA$  sugarú gömb metszete  $\mathcal{S}$ -sel (a gömb főköre) adja a húrnégyszög körülírt körét. Ezt a gömböt az  $AC$  és a  $BD$  átlókat tartalmazó,  $\mathcal{S}$ -re merőleges síkok egy-egy körben metszik: mivel átmérőjük  $AC$ , illetve  $BD$ , ezek a körök éppen  $k_1$  és  $k_2$ .

Ekkor az  $AD$  és  $BD$  átlók metszéspontjában az  $\mathcal{S}$  síkra állított merőleges egyenes két pontban metszi a gömböt: ezek a gömb két pontja is, tehát az  $AC$  és  $BD$  átmérőjű,  $\mathcal{S}$ -re merőleges körök valóban metszik egymást.

*Bálint Gergely* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

