I. megoldás. A H halmaz tetszőleges R részhalmazára jelölje $\overline{R}$ az R komplementerét, azaz H azon elemeinek a halmazát, amelyek nem elemei R-nek. Képezzünk H részhalmazaiból $(A,\ B)$ rendezett párokat; H-nak 2^n darab részhalmaza lévén e rendezett párok száma $2^n \cdot 2^n = 4^n$. A rendezett párokat négyes csoportokra osztjuk; minden ilyen csoport álljon az $(A,\ B)$, $(\overline{A},\ B)$, $(A,\ \overline{B})$, $(\overline{A},\ \overline{B})$ párokból, ahol $A,\ B \subseteq H$. Könnyen látható, hogy minden rendezett pár pontosan egy ilyen csoporthoz tartozik, így e csoportok száma $\dfrac{1}{4} \cdot 4^n = 4^{n-1}$. Tekintsük H-nak egy h elemét, és az $A,\ B \subseteq H$ halmazokat; mivel h az A és $\overline{A}$ közül pontosan az egyiknek eleme (hasonlóan B és $\overline{B}$ közül is), azért h az $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazoknak is pontosan az egyikében van benne. Tehát az $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazok elemszámának összege $|H| = n$. A számlálást a 4^{n-1} csoport mindegyikére elvégezve az elemszámok összegének összegére $n \cdot 4^{n-1}$ adódik, és ez éppen a feladat állítása.

Gyürki István (Zseliz, Magyar Tannyelvű Gimn., 12. o.t.)

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. A H elemeit sorbarendezzük, és minden $A,\ B \subseteq H$ halmazpárhoz hozzárendeljük azt a 4-es számrendszerbeli n-jegyű számot, amelynek i-edik jegye 0, 1, 2 vagy 3 aszerint, hogy a H halmaz i-edik eleme az $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazok melyikéhez tartozik. Így összesen 4^n darab különböző számot kapunk, vagyis az összes n-jegyű szám előáll ezen a módon. Ezekben a számokban összesen ugyanannyi 0 van, mint ahány 1-es vagy ahány 2-es vagy amennyi 3-as. Tehát a bennük előforduló 0 jegyek száma összesen $\dfrac{1}{4} \cdot 4^n \cdot n = 4^{n-1} \cdot n$; másrészt a nullák együttes száma éppen az $|A \cap B|$ elemszámoknak az összege.

Breuer János (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

III. megoldás. A H mindegyik x eleméhez meghatározzuk azoknak az $A,\ B$ pároknak $(A,\ B \subseteq H)$ a számát, amelyekre $x \in A \cap B$; a kapott számokat az x elemekre összegezve éppen a feladatban szereplő összeghez jutunk.

Ha $x \in A$, akkor a H minden további eleme vagy eleme A-nak, vagy nem; ez két lehetőség, tehát A megválasztása 2^{n-1}-féleképpen történhet, akárcsak a B halmazé. Az x-et tartalmazó $(A,\ B)$ halmazokból tehát $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^{n-1}$ rendezett pár készíthető, a H elemeire pedig összesen $n \cdot 4^{n-1}$.

Kiss 345 Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)