Tegyük fel – a bizonyítandó állítással szemben –, hogy minden kék színű csúcsból legalább 6, és minden piros színűből legalább 4 él indul ki. A konvex poliéder éleinek számát jelölje e, a lapok számát l, a piros és kék csúcsok számát pedig rendre c_p és c_k. Az Euler-féle poliéder-tétel szerint

$$c_p + c_k + l = e + 2. \tag{1}$$

Az egyes csúcsokból kiinduló élek számát összegezve az összes élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden él két csúcsot köt össze. Indirekt feltevésünk értelmében a csúcsokból kiinduló élek számának összege legalább $4c_p + 6c_k$, ezért

$$e \geq \frac{1}{2}(4c_p + 6c_k) = 2c_p + 3c_k. \tag{2}$$

Minden él két lapot határol, így a lapok oldalszámának összege is az élek számának a kétszerese. A piros csúcsokkal rendelkező lapnak c_p, a többi lapnak legalább 3 oldala lévén, $2e \geq c_p + (l-1)3$, azaz

$$l \leq 1 + \frac{2e - c_p}{3}. \tag{3}$$

A (3) és (1) összevetésével

$$e + 2 - c_p - c_k = l \leq 1 + \frac{2e - c_p}{3},$$

innen pedig

$$e \leq 2c_p + 3c_k - 3;$$

ez ellentmond (2)-nek, ami a feladat állítását bizonyítja.

Ivaskó György (Baja, III. Béla Gimn., 12. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Kísérl. Gimn., 11. o.t.) megjegyezte, hogy a bizonyításból az is következik, hogy nemcsak egy, hanem legalább két csúcs létezik, amely az előírt tulajdonságú. Egy példával azt is megmutatja, hogy általában ennél több már nem követelhető meg.