

Legyen a gúla alaplapja a BCD háromszög, negyedik csúcsa A , és válasszuk úgy a jelölést, hogy $CAD\angle = 60^\circ$, $BAD\angle = 90^\circ$ és $BAC\angle = 120^\circ$. Legyen B -nek az AD egyenesre vonatkozó tükörképe B' . Mivel AD és BA egymásra merőlegesek, azért B , A és B' egyenesen vannak, és $B'A = AB = 1$. Mivel $BAC\angle = 120^\circ$, azért $CAB'\angle = 60^\circ$, s így $CA = AB' = 1$ miatt a CAB' háromszög szabályos. A CAD háromszög is szabályos, mert $CA = DA = 1$ és $CAD = 60^\circ$. Ezért a C pont a DAB' egyenlő szárú derékszögű háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van, vagyis rajta van a háromszög köré írható kör középpontjában a háromszög síkjára állított merőleges egyenesen.

A DAB' háromszög köré írható körének középpontja a DB' szakasz F felezőpontja, $FA = FB' = FD = \frac{DB'}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A CF szakasz hosszát a CFA derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk ki:

$$CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az $ABCD$ gúla ABD lapjához tartozó magassága CF , ezért a gúla térfogata:

$$V = \frac{T_{ABD} \cdot CF}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Megjegyzés. Ha az A pont $B'D$ egyenesre való tükörképe A' , akkor könnyen látható, hogy az $ADA'B'C$ test négyzet alapú szabályos gúla (2. ábra). Ismert, hogy ennek C -ből induló magassága $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, ahol a az élek hossza.

Horváth Gergely (Fonyód, Mátyás Király Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

