Alakítsuk át a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán lévő kifejezést az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosságot és a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{ab(a+b+c)}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a^2+b^2)c}{ab(a+b+c)}=$$
$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2)-(a+b)ab}{ab(a+b+c)}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a+b}{a+b+c}.$$

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a+b}{a+b+c}\ge\sqrt{2}. \tag{1}$$

Ismert, hogy $a^2+b^2\ge 2ab$, amiből következik, hogy $\dfrac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$, hiszen a és b pozitív számok. Belátjuk, hogy $\dfrac{a+b}{a+b+c}\le 2-\sqrt{2}$. Átszorozva és rendezve:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(a+b)\le\left(2-\sqrt{2}\right)c.$$

Ezt elosztva $(\sqrt{2}-1)$-gyel kapjuk, hogy $(a+b)\le\sqrt{2}c$.

Ismét használva Pitagorasz tételét, majd mindkét oldalt 2-vel osztva:

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

ami a számtani és a négyzetes közép közti ismert egyenlőtlenség. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti $\dfrac{a+b}{a+b+c}\le 2-\sqrt{2}$ egyenlőtlenség is teljesül. Az (1) egyenlőtlenség ezután már egyszerűen adódik:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a+b}{a+b+c}\ge 2-\left(2-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$$

Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is bebizonyítottuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b$, azaz ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú.

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján