Legyen $M$ az a szám, amely előáll bármelyik két $a_i$ legkisebb közös többszöröseként, és legyen $b_i = \frac{M}{a_i}$. A $b_1, \ldots, b_n$ számok páronként relatív prímek, mert $i \neq j$ esetén

$$(b_i,\ b_j) = \left(\frac{M}{a_i},\ \frac{M}{a_j}\right) = \frac{M}{[a_i,\ a_j]} = \frac{M}{M} = 1.$$

Az $M$ mindegyik $b_i$-nek többszöröse, ezért többszöröse a szorzatuknak is. Tehát $M = cb_1b_2\ldots b_n$ egy alkalmas $c$ pozitív egésszel, és $a_i = \frac{M}{b_i} = cb_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n$. Az $a_1, \ldots, a_n$ számok legnagyobb közös osztója

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n) = \left(\frac{M}{b_1},\ \ldots,\ \frac{M}{b_n}\right) = \frac{M}{[b_1,\ \ldots,\ b_n]} = \frac{M}{b_1\ldots b_n} = c,$$

ezért $c = 1$.

Tehát az $a_1, \ldots, a_n$ számokra vonatkozó feltételek azzal ekvivalensek, hogy megfelelő, páronként relatív prím $b_1, \ldots, b_n$ pozitív egészekkel $a_i = b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n$.

Legyen $u$ tetszőleges egész szám, és tegyük fel, hogy felírható a kívánt alakban:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = u.$$

Vizsgáljuk ezt az egyenletet modulo $b_i$. A bal oldalon $a_i$ kivételével az összes együttható osztható $b_i$-vel, ezért

$$a_ix_i = (b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n)x_i \equiv u \pmod{b_i}.$$

Legyen $\xi_i(u)$ a legkisebb olyan nemnegatív egész, amelyre

$$(b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n)\xi_i(u) \equiv u \pmod{b_i}.$$

Az előbbiek alapján, figyelembe véve, hogy $b_i$ relatív prím $(b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n)$-nel,

$$x_i \equiv \xi_i(u) \pmod{b_i},$$

másrészt, $\xi_i(u)$ minimalitása miatt $x_i \geq \xi_i(u)$. Bevezetve az $y_i = \frac{x_i - \xi_i(u)}{b_i}$ jelölést,

$$\frac{u - a_1\xi_1(u) - \cdots - a_n\xi_n(u)}{b_1\ldots b_n} = y_1 + \cdots + y_n$$

egy nemnegatív egész szám.

Vezessük be a

$$h(u) = \frac{u - a_1\xi_1(u) - \cdots - a_n\xi_n(u)}{b_1b_2\ldots b_n} \tag{2}$$

függvényt. Eddig azt láttuk, hogy ha $u$ előállítható, akkor $h(u)$ egy nemnegatív egész szám. Az is biztos, hogy $h(u)$ mindig egész, mert (2) számlálójában tetszőleges $i$-re $u - a_i\xi_i(u)$ osztható $b_i$-vel, a maradék tagokban pedig az $a_j$ együttható osztható vele. Ha a $h(u)$ egész szám nemnegatív, akkor $u$ egy megfelelő előállítását kapjuk az $x_1 = \xi_1(u) + h(u)b_1$, $x_2 = \xi_2(u), \ldots, x_n = \xi_n(u)$ számokkal.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $u$ akkor és csak akkor állítható elő, ha $h(u) \geq 0$.

Bebizonyítjuk, hogy a feladat állításának megfelelő szám

$$p = (n-1)b_1b_2\ldots b_n - a_1 - \cdots - a_n. \tag{1}$$

Vizsgáljuk az $u$ és $p - u$ számokat. Tetszőleges $i$-re

$$a_i\xi_i(u) + a_i\xi_i(p-u) \equiv p \equiv -a_i \pmod{b_i},$$

amiből – mivel $a_i$ és $b_i$ relatív prímek –

$$\xi_i(u) + \xi_i(p-u) \equiv -1 \pmod{b_i}. \tag{3}$$

Mivel $\xi_i$ értéke mindig $0$ és $b_i - 1$ közé esik, (3) csak úgy teljesülhet, ha $\xi_i(u) + \xi_i(p-u) = b_i - 1$. Ezt beírva $h(u)$-ba és $h(p-u)$-ba,

$$\begin{aligned} h(u) + h(p-u) &= \frac{u - a_1\xi_1(u) - \cdots - a_n\xi_n(u) + (p-u) - a_1\xi_1(p-u) - \cdots - a_n\xi_n(p-u)}{b_1b_2\ldots b_n} = \\ &= \frac{p - a_1\left(\xi_1(u) + \xi_1(p-u)\right) - \cdots - a_n\left(\xi_n(u) + \xi_n(p-u)\right)}{b_1b_2\ldots b_n} = \\ &= \frac{((n-1)b_1b_2\ldots b_n - a_1 - \cdots - a_n) - a_1(b_1-1) - \cdots - a_n(b_n-1)}{b_1b_2\ldots b_n} = -1. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a $h(u)$ és $h(p-u)$ egész számok közül pontosan az egyik nemnegatív, azaz $u$ és $p-u$ közül pontosan az egyik állítható elő.