Először kifejezzük a PQR sík és O távolságát az OP, OQ és OR szakaszok hosszának segítségével. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, amelynek origója O, és tengelyei az OP, OQ, OR irányokba mutatnak. Az OP, OQ, OR távolságokat d_1, d_2, d_3-mal jelölve, a PQR sík egyenletét tengelymetszetes alakban írva $\frac{x}{d_1}+\frac{y}{d_2}+\frac{z}{d_3}=1$, amiből a távolság

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}}}.$$

A továbbiakban tehát azt kell igazolnunk, hogy az $\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}$ kifejezés értéke nem függ a P, Q, R pontok megválasztásától.

Vegyük most fel koordináta-rendszerünket az ellipszoid tengelyei irányában. Így az ellipszoid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

alakban írható, ahol a, b és c a féltengelyek hossza.

Legyen a három koordináta-egységvektor $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, ezen kívül $\frac{\overrightarrow{OP}}{d_1}=\mathbf{v}_1$, $\frac{\overrightarrow{OQ}}{d_2}=\mathbf{v}_2$, $\frac{\overrightarrow{OR}}{d_3}=\mathbf{v}_3$. Végül legyen $u_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{v}_j$.

A feltételek szerint a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok egységnyi hosszúak és páronként merőlegesek. Ebből következik, hogy tetszőleges i-re

$$\mathbf{e}_i=u_{i1}\mathbf{v}_1+u_{i2}\mathbf{v}_2+u_{i3}\mathbf{v}_3$$

és

$$u_{i1}^2+u_{i2}^2+u_{i3}^2=|\mathbf{e}_i|^2=1.$$

(1)-be behelyettesítve P, Q, R koordinátáit, azaz a $(d_ju_{1j},d_ju_{2j},d_ju_{3j})$ számhármasokat,

$$\frac{(d_ju_{1j})^2}{a^2}+\frac{(d_ju_{2j})^2}{b^2}+\frac{(d_ju_{3j})^2}{c^2}=1, \qquad (j=1,2,3)$$

azaz

$$\frac{1}{d_j^2}=\frac{u_{1j}^2}{a^2}+\frac{u_{2j}^2}{b^2}+\frac{u_{3j}^2}{c^2}. \qquad (j=1,2,3)$$

Ezeket összegezve j értékeire,

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{u_{11}^2+u_{12}^2+u_{13}^2}{a^2}+\frac{u_{21}^2+u_{22}^2+u_{23}^2}{b^2}+\frac{u_{31}^2+u_{32}^2+u_{33}^2}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Megjegyzés. A megoldás szó szerint ugyanez akárhány dimenzióban.