I. megoldás. Tekintsünk egy megfelelő elrendezést, és nézzük a legnagyobb elemet, n-et. Akárhol áll a sorban, egyetlen szomszédja, $(n-1)$ meg kell előzze. Az $(n-1)$-et pedig meg kell előznie $(n-2)$-nek, hiszen másik szomszédja, n, mögötte van. Ez így folytatódik, amíg az elrendezés legelső eleméhez nem érünk. Ha ez k, akkor az elrendezésben a k, $k+1$, $\ldots$, $n-1$, n számok ebben a sorrendben szerepelnek.

Tekintsük most a legkisebb elemet, az 1-et. Akárhol van – kivéve ha az első helyen, azaz $k=1$ – meg kell előzze egyetlen szomszédja, a 2. Ezt viszont a 3-nak kell megelőznie, hiszen a másik szomszédja, az 1 már mögötte van. Ez így folytatódik a $(k-1)$-ig, amit pedig szomszédja, k megelőz, hiszen a legelső helyen áll. A k-val kezdődő elrendezésben tehát a k-nál kisebb számok sorrendje is egyértelmű: $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 2, 1.

Ha rögzítjük a legelső elemet, k-t, akkor az $n-1$ szabad helyre $\binom{n-1}{k-1}$-féleképpen tudjuk a $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 2, 1 számokat ebben a sorrendben felírni, ezután pedig a k-nál nagyobb elemek beírása a megmaradt helyekre a kötött sorrend miatt már egyértelmű.

A lehetséges sorbarendezések száma így

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

Csirmaz Előd (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.)

II. megoldás. Először azt igazoljuk, hogy egy megfelelő sorbarendezésnél a legutolsó helyen az 1 vagy pedig az n áll. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, legyen $1<i<n$, és tegyük fel, hogy a sorozat utolsó tagja i. Ekkor az i-t mindkét szomszédja, az $i+1$ és az $i-1$ is megelőzi. Ezután az i-nél nagyobb számok a kisebbik, az i-nél kisebbek pedig a nagyobbik szomszédjukat előzik meg, így a másik szomszédjuknak őket kell megelőzniük.

Így két láncot kapunk:

$$n \leftarrow \ldots \leftarrow i+2 \leftarrow i+1$$

$\nwarrow$
i
$\swarrow$

$1 \leftarrow \ldots \leftarrow i-2 \leftarrow i-1 Ezaztjelenti, hogyaz1saznmindkettenalegelshelyenkellllljanak, aminyilvnnemlehetsges.gyvalban1vag$

Akár 1, akár pedig n áll az utolsó helyen, a megmaradó számok $f(n-1)$-féle sorrendjének bármelyike megfelelő n hosszúságú sorozatot ad, így $f(n)=2f(n-1)$. Mivel $f(1)=1$, azért $f(n)=2^{n-1}$.

Vizer Máté (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

III. megoldás. Legyen $1 \le k \le n$, és tegyük a k-t a legelső helyre. A második elem így a k valamelyik szomszédja, $k-1$ vagy $k+1$. (Ha $k=1$ vagy $k=n$, akkor a két eset közül persze csak az egyik lehetséges.) Az első két elem mindenesetre két szomszédos szám, a harmadik pedig e „szakasz” valamelyik szomszédja, a kisebbik számnál 1-gyel kisebb vagy a nagyobbiknál 1-gyel nagyobb.

Ugyanígy kapjuk, hogy az első i darab elem i darab szomszédos szám, és az $(i+1)$-edik elem e számok minimumánál 1-gyel kisebb vagy maximumánál 1-gyel nagyobb.

Így minden sorozathoz – a második elemtől kezdve – hozzárendelhető egy 0-kból és 1-esekből álló sorozat. Az $(i+1)$-edik helyen álló 0 azt jelenti, hogy az első i darab szám minimumánál 1-gyel kisebb, az 1 pedig azt, hogy az első i darab szám maximumánál 1-gyel nagyobb szám került az $(i+1)$-edik helyre.

Így egy $n-1$ hosszúságú 0–1 sorozatot rendeltünk az első n darab szám egy megfelelő sorbarendezéséhez. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, ha ebből a 0–1 sorozatból elő tudjuk állítani az első elemet, hiszen ezután a folytatás már egyértelmű.

Vegyük észre, hogy az első elem, k, a sorozatban szereplő nullák számánál 1-gyel nagyobb, hiszen ekkor van $(k-1)$ lehetőségünk arra, hogy az addigi szakasz minimumát 1-gyel csökkentsük.

Az $(n-1)$ hosszúságú 0–1 sorozatok száma, mint ismeretes, 2^{n-1}, ezért ennyi a feladatban kérdezett sorbarendezések száma is.

Tóth Ágnes (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.)