megoI. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha $n>0$ egész szám, akkor

$$\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+3)^{n+1}} > \frac{n^{n+2}}{(n+2)^n}. \tag{1}$$

Ebből az általánosításból következik, hogy feladatunk megoldása ($n=1997$ esetén):

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} > \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}}.$$

Szorozzuk meg ugyanis (1) mindkét oldalát $(n+3)^{n+1}(n+2)^n$-nel: pozitív egész számokról lévén szó, az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$$(n+1)^{n+3}(n+2)^n > n^{n+2}(n+3)^{n+1}.$$

Ezt azonosan átalakítva:

$$(n+1)^n(n+2)^n(n+1)^3 > n^n(n+3)^n\cdot n^2(n+3), [(n+1)(n+2)]^n(n+1)^3 > [n(n+3)]^n\cdot n^2(n+3).$$

Ez viszont a következők miatt teljesül:

$$(n+1)(n+2)=n^2+3n+2>n^2+3n=n(n+3), \qquad \text{így} [(n+1)(n+2)]^n > [n(n+3)]^n,$$

hiszen $n>0$ egész. Tehát

$$[(n+1)(n+2)]^n(n+1)^3 > [n(n+3)]^n(n+1)^3 = [n(n+3)]^n(n^3+3n^2+3n+1) >> [n(n+3)]^n(n^3+3n^2) = [n(n+3)]^n n^2(n+3$$

Az ekvivalens átalakítások miatt a reláció mindvégig ugyanolyan irányú maradt, ezzel igazoltuk (1)-et.

Somogyi Dávid (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk a következő segédtételt: Legyenek a és b pozitív egész számok, akkor

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^b.$$

Írjuk fel ugyanis a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $1, \underbrace{\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \dots, \frac{a}{b}}_{b \text{ darab}}$ számokra:

$$\frac{1+\overbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\dots+\frac{a}{b}}^{b \text{ darab}}}{b+1} \ge \sqrt[b+1]{1\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\dots\cdot\frac{a}{b}},$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{b \text{ darab}}$ azaz

$$\frac{1+a}{b+1} \ge \sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^b}, \qquad \text{innen pedig valóban} \qquad \left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \ge \left(\frac{a}{b}\right)^b,$$

és egyenlőség csak akkor van, ha $1=\frac{a}{b}$, tehát ha $a=b$. $a=1997$, $b=1999$ behelyettesítésével tehát

$$\left(\frac{1998}{2000}\right)^{2000} > \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}.$$

Szorozzuk be az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2000^2-nel:

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} = \left(\frac{1998}{2000}\right)^{2000}\cdot 2000^2 > \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}\cdot 2000^2 >> \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1999}\cdot 1999^2 = \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}},$$

ezzel beláttuk, hogy

$$\frac{1998^{2000}}{2000^{1998}} > \frac{1997^{1999}}{1999^{1997}}.$$

Hegyi Márta (Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Többen számológéppel számoltak, de a gép a tizedesjegyeket csak adott határig tudja kiírni, és a kerekített értékekkel való számolás a relációt akár meg is fordíthatja – néhány esetben ez is történt! *Kiss Norbert*

(Budapest, Szent István Gimn., 10. o.t.) azonban azt is megvizsgálta, hogy a kerekítési hiba milyen hatással lehet a kapott eredményre, ezzel a megoldása teljesen korrekt.

2. Hasonlóan, a kerekítési hiba megvizsgálásával adott jó megoldást *Andrássy Zoltán* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) is, aki a törtek tízes alapú logaritmusával számolt.

3. Tipikus hiba volt a dolgozatok egy részében, hogy

$$\frac{1998}{2000} > \frac{1997}{1999}\text{-ből} \qquad \left(\frac{1998}{2000}\right)^{1998} > \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1997}\text{-re}$$

következtettek, ami nem jogos, hiszen 1-nél kisebb pozitív számok természetes kitevőjű hatványai egyre csökkennek, így pl.

$$\left(\frac{1997}{1999}\right)^{1998} < \left(\frac{1997}{1999}\right)^{1997}.$$