I. megoldás. Mivel $n > 2$ páros egész, azért van olyan $k \geq 2$ egész szám, amelyre $n = 2k$. Az a alapú számrendszerbeli $2k$-jegyű csupa 1-esből álló szám

$$\begin{aligned} &a^{2k-1} + a^{2k-2} + \dots + a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1 = \\ &= a^k \cdot (a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1) + a^{k-1} + a^{k-2} + a + 1 = \\ &= (a^k + 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1). \end{aligned}$$

Nyilván $a \geq 2$ és $k \geq 2$, ezért az első tényező legalább 5, a második tényező pedig nagyobb, mint $a^{k-1} \geq 2$, és mindkét tényező egész szám.

Tehát, ha $n > 2$ páros szám, akkor $\underbrace{11\dots1}_{n}$ tetszőleges számrendszerben felírható két 1-nél nagyobb pozitív egész szám szorzataként a fent látható módon, azaz összetett szám, így nem lehet prím.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseivel most

$$\begin{aligned} &a^{2k-1} + a^{2k-2} + a^{2k-3} + a^{2k-4} + \dots + a + 1 = \\ &= a^{2k-2}(a+1) + a^{2k-4}(a+1) + \dots + (a+1) = (a+1)(a^{2k-2} + a^{2k-4} + \dots + 1). \end{aligned}$$

Most is mindkét tényező 1-nél nagyobb pozitív szám, hiszen $a \geq 2$ miatt $a + 1 \geq 3$ és $a^{2k-2} = a^{n-2} \geq a^{4-2} = a^2 \geq 2^2 = 4$ (n legalább 4, a legalább 2), tehát $\underbrace{111\dots1}_{n}$ ilyen módon is szorzattá bontható, így nem lehet prím.

Bálint Gergely (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Az első megoldásban lényegében azt számoltuk ki, hogy az a alapú számrendszerben felírt $A_n = \underbrace{11\dots1}_{2k}$ számnak – nyilván valódi – osztója az $\underbrace{11\dots1}_{k}$ szám, a másodikban pedig, hogy A_n osztható az $A_2 = 11$ számmal is.

Az első eset az $\dfrac{a^{2k}-1}{a-1} = (a^k+1)\dfrac{a^k-1}{a-1}$, a második az $\dfrac{a^{2k}-1}{a-1} = (a+1)\dfrac{a^{2k}-1}{a^2-1}$ azonosságot rejti.

2. A feladat természetes módon általánosítható: ha d az n valódi osztója, akkor $a_d = \underbrace{11\dots1}_{d}$ is valódi osztója A_n-nek, amely tehát nem lehet prímszám.