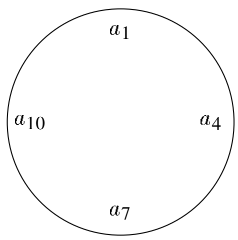
Legyen a tizenkét szám ebben a sorrendben a_1, a_2, $\ldots$, a_{12}, az egymás melletti számhármasok összege pedig $S_1 = a_{12}+a_1+a_2$, $S_2 = a_1+a_2+a_3, \ldots, S_{12} = a_{11}+a_{12}+a_1$. Ezek összege, $S_1+S_2+\cdots+S_{12} = 3(a_1+a_2+\cdots+a_{12}) = 234$. Az S_i összegek átlaga így $19,5$, van tehát köztük legalább ekkora. Másfelől ezek az összegek egész számok, azért valóban van köztük olyan, amelyiknek legalább 20 az értéke.

Azt állítjuk, hogy a feladat második kérdésére is igenlő a válasz, az S_i összegek között van 20-nál nagyobb is.

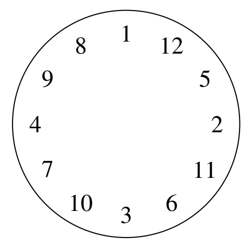
Tegyük fel, hogy ez nem igaz, a 12 szám elrendezhető úgy, hogy ne legyen 20-nál nagyobb S_i összeg. Ha hatnál kevesebb 20 értékű S_i összeg volna, akkor a tizenkét összeg összege legfeljebb $5 \cdot 20 + 7 \cdot 19 = 233$ lenne, ami lehetetlen. A 20 értékű összegek száma így legalább 6. Ha 7 vagy ennél is több ilyen összeg van, akkor van köztük két *szomszédos*, azaz $S_i = a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = S_{i+1} = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 20$. Szomszédos összegek értéke viszont egyáltalán nem lehet egyenlő, hiszen ebből $a_{i-1} = a_{i+2}$ következne.

Ha pontosan 6 maximális összeg van, akkor ahhoz, hogy 234 legyen a 12 számhármas összegének az összege, a további 6 számhármas mindegyikének összege 19 kell legyen.

A szomszédos összegek között nincsenek egyenlők, így a 12 számhármasban felváltva követik egymást a 19 és a 20 értékű összegek. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges, feltétlenül van két szomszédos összeg, amelyek eltérése nagyobb, mint 1.



1. ábra



2. ábra

Tekintsük ehhez az a_1, a_4, a_7, a_{10} számokat (*1. ábra*). E négy szám különböző, így van köztük az adott körüljárás szerint szomszédos kettő, amelyek eltérése legalább 2. Például $|a_4 - a_7| \geq 2$. Ez az eltérés viszont nem más, mint $|S_5 - S_6| = |a_4+a_5+a_6-(a_5+a_6+a_7)|$. E két szomszédos összeg eltérése így legalább 2, ami ellentmond a korábbiakban talált egyedül lehetséges elrendezésnek. Nem lehetséges tehát, hogy az S_i összegek maximuma 20 legyen, van olyan összeg, amelyik legalább 21. A *2. ábrán* látható elrendezésben az S_i összegek maximuma éppen 21, eredményünk ezért tovább nem javítható.

Tran Thanh Long (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján