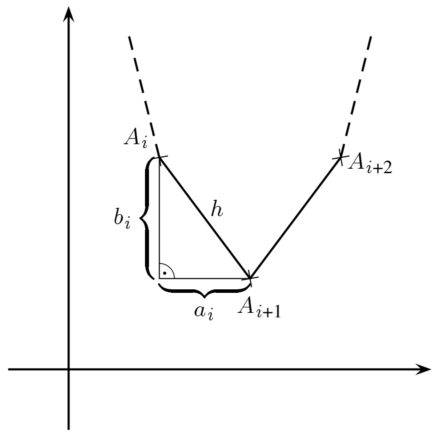
Legyen a feladatban szereplő rácssokszög az $A_1A_2\ldots A_k$ sokszög, az $A_i$ pont koordinátái legyenek $(x_i;y_i)$, legyen továbbá $a_i=x_{i+1}-x_i$ és $b_i=y_{i+1}-y_i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, az indexeket moduló $k$ számolva). Jelöljük a rácssokszög oldalainak hosszát $\sqrt{h}$-val.




Mivel a sokszög minden oldalának hossza $\sqrt{h}$, azért minden $i$-re

$$a_i^2+b_i^2=h.$$

Egy négyzetszám 4-gyel osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat, ezért $h$ a 4-gyel osztva 0, 1 vagy 2 maradékot ad. Vizsgáljuk meg külön-külön ezt a három esetet.

Ha $h\equiv 0 \pmod 4$, akkor $a_i$ is és $b_i$ is páros minden $i$-re. Ekkor a sokszöget a felére kicsinyíthetjük úgy, hogy a kicsinyített sokszög is egyenlő oldalú rácssokszög legyen. Mindaddig folytassuk a kicsinyítést, amíg az újonnan keletkezett sokszög $a_i$ és $b_i$ típusú számai közt legalább egy páratlan nem lesz. Ezt véges sok lépés után biztosan elérjük. A kicsinyítések során a sokszög oldalszáma nem változik, így ezt az esetet visszavezettük a maradék két eset egyikére.

Ha $h\equiv 1 \pmod 4$, akkor minden $i$-re $a_i$ és $b_i$ egyike páros, a másik pedig páratlan, azaz $a_i+b_i\equiv 1 \pmod 2$. Az így kapott $k$ darab kongruenciát összeadva:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i+\sum_{i=1}^{k} b_i\equiv k \pmod 2.$$

De az $a_i$-k és $b_i$-k definíciója miatt $\sum_{i=1}^{k} a_i=\sum_{i=1}^{k} b_i=0$, hiszen a sokszög zárt, tehát $k\equiv 0 \pmod 2$. Ez viszont éppen a bizonyítandó állítás.

Ha $h\equiv 2 \pmod 4$, akkor $a_i$ is és $b_i$ is páratlan minden $i$-re. Vagyis $a_i\equiv 1 \pmod 2$ minden $i$-re, tehát

$$0=\sum_{i=1}^{k} a_i\equiv k \pmod 2.$$

A sokszög oldalszáma tehát ebben az esetben is páros.

Több eset nincs, ezért a feladat állítását igazoltuk.

*Székelyhidi Gábor* (Kuwait, New English School, 12. o.t.) dolgozata alapján