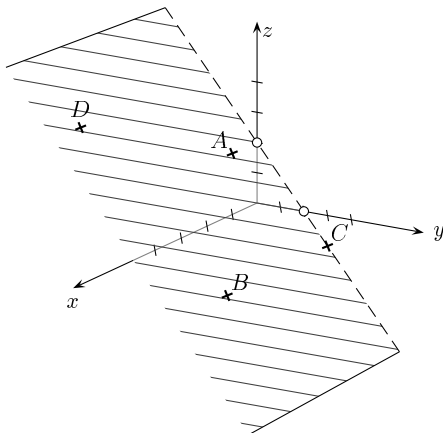
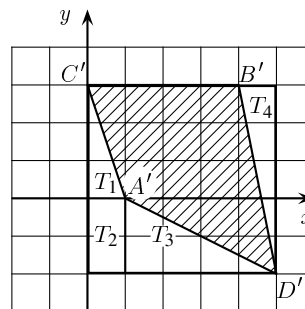


I. megoldás. Mivel mind a négy pont második és harmadik koordinátájának összege 2, azért a pontok rajta vannak az $y + z = 2$ egyenletű síkon. Ez a sík párhuzamos az $y = 0$ és a $z = 0$ egyenletű koordinátasíkok egyik szögfelezősíkjával, tehát 45° -os szöget zár be a $z = 0$ síkkal. A vetület csúcsai (most már az (x, y) síkban, a harmadik koordinátát elhagyva): $A'(1; 0)$, $B'(4; 3)$, $C'(0; 3)$ és $D'(5; -2)$.



1. ábra



2. ábra

Ismert (lásd pl. *Reiman István: A geometria és határterületei*, 49–50. old.), hogy az A, B, C és D pontok által meghatározott konvex négyszög területét $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -vel szorozva kapjuk az A', B', C' és D' pontok által meghatározott konvex négyszög területét. Ez utóbbit a 2. ábra alapján könnyen meghatározhatjuk:

$$T_{A'D'B'C'} = 25 - T_1 - T_2 - T_3 - T_4 = 25 - 1,5 - 4 - 2,5 = 15.$$

A keresett terület tehát $T_{ADBC} = \sqrt{2} \cdot T_{A'D'B'C'} = 15\sqrt{2}$ területegység.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az $\overrightarrow{AD}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok vektoriális szorzata

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} = (0, 10, 10),$$

a $\overrightarrow{BD}$ és a $\overrightarrow{BC}$ vektorok vektoriális szorzata pedig

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = (0, -20, -20).$$

Mivel a két szorzatvektor párhuzamos, az ACD és a BCD síkok is párhuzamosak. E két síknak a C és D közös pontjai, tehát a síkok egybeesnek, vagyis az A, B, C és D pontok egysíkúak.

3. ábra

A vektoriális szorzatok ellentétes irányúak, ezért az ACD és a BCD háromszögek ellentétes körüljárásúak. Ez azt jelenti, hogy az A és a B pontok a CD egyenes ellentétes oldalain vannak (3. ábra). Így a négy pont által meghatározott konvex négyszög területe az ACD és a BCD háromszögek területének összege. Az ACD háromszög területe $\frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC} \right| = 5\sqrt{2}$, a BCD háromszög területe pedig $\frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} \right| = 10\sqrt{2}$. Az $ABCD$ konvex négyszög területe tehát $15\sqrt{2}$ területegység.

