

Műveletről eleve csak akkor beszélhetünk, ha minden $x, y > 0$ -ra $x * y > 0$ is teljesül, azaz

$$x + y + t\sqrt{xy} > 0, t > -\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

Ez pontosan akkor teljesül minden x, y pozitív számpárra, ha $t > -2$.

A kívánt $(x * y) * z = x * (y * z)$ azonosság nyilván fennáll, ha $t = 0$. Ha $t \neq 0$, akkor pedig ekvivalens a

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xz + yz + t\sqrt{xyz}} = \sqrt{yz} + \sqrt{xy + xz + t\sqrt{yzx}}$$

azonossággal. Az $x = 4, y = z = 1$ értékekkel tesztelve:

$$2 + \sqrt{5 + 2t} = 1 + \sqrt{8 + 4t}, 1 + \sqrt{5 + 2t} = \sqrt{8 + 4t}. 6 + 2t + 2\sqrt{5 + 2t} = 8 + 4t, \sqrt{5 + 2t} = 1 + t, 5 + 2t = 1 + 2t + t^2, 4 = t^2.$$

Tehát $t = 0$ mellett csak $t = 2$ jön szóba. Az utóbbi esetben $x * y = x + y + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$, így valóban $(x * y) * z = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x * (y * z)$. A feladat követelményeit csak a $t = 0$ és 2 értékek elégítik ki.

Papp Dávid (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.t.)