Legyen $x_1+x_2+\dots+x_n=a$. Az egyenlőtlenség bal oldala:

$$\frac{x_1}{a-x_1}+\frac{x_2}{a-x_2}+\dots+\frac{x_n}{a-x_n}=\left(\frac{a}{a-x_1}-1\right)+\left(\frac{a}{a-x_2}-1\right)+\dots+\left(\frac{a}{a-x_n}-1\right)=$$
$$=\frac{a}{a-x_1}+\dots+\frac{a}{a-x_n}-n.$$

Alkalmazzuk a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget az $\dfrac{a}{a-x_i}$ (pozitív) számokra:

$$\frac{a}{a-x_1}+\dots+\frac{a}{a-x_n}-n\ge n\cdot\frac{n}{\frac{a-x_1}{a}+\dots+\frac{a-x_n}{a}}-n=\frac{n^2a}{na-a}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha az $\dfrac{a}{a-x_i}$ számok mind egyenlőek, azaz $x_1=x_2=\dots=x_n$.

Sipos Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. o.t.)