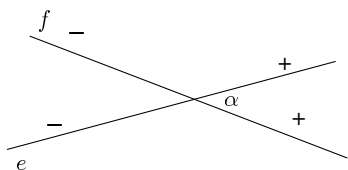


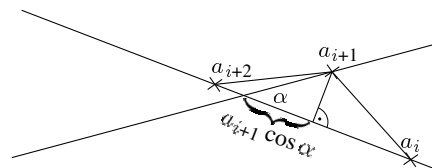
Jelölje a két egyenest e és f , közbezárt szögüket α (a feladatban $\alpha = 36^\circ$), a szöcske által érintett pontoknak az egyenesek metszéspontjától való előjeles távolságát (az egyeneseken a pozitív irányt az 1. ábrán látható módon kijelölve) pedig $a_0, a_1, a_2, \dots$. Az egyszerűség kedvéért ugyanígy hivatkozunk azokra a pontokra is, ahová a szöcske ugrik. A páros indexű távolságok, illetve a nekik megfelelő pontok legyenek az e , a páratlanok pedig az f egyenesen. A szöcske minden ugrásának hossza ugyanakkora, ezért az a_i, a_{i+1}, a_{i+2} ($i = 0, 1, 2, \dots$) pontok egy egyenlő szárú háromszöget határoznak meg (azt nyilván feltehetjük, hogy $a_{i+2} \neq a_i$, azaz a szöcske egy ugrás után nem ugrik vissza ugyanazon az úton), tehát az a_{i+1} pontnak a másik egyenesen lévő merőleges vetülete felezi az a_i és az a_{i+2} pontokat összekötő szakaszt (2. ábra). Így minden i esetén igaz, hogy

$$(1) \quad a_{i+2} + a_i = 2a_{i+1} \cos \alpha.$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a_0 és a_1 egyértelműen meghatározza a szöcske pályáját.



1. ábra



2. ábra

Ismertek az (1) összefüggéshez formailag hasonló trigonometrikus azonosságok:

$$\sin(i+2)\alpha + \sin i \cdot \alpha = 2 \sin \frac{2i+2}{2} \alpha \cdot \cos \frac{2\alpha}{2} = 2 \sin(i+1)\alpha \cos \alpha, \quad \cos(i+2)\alpha + \cos i \cdot \alpha = 2 \cos \frac{2i+2}{2} \alpha \cdot \cos \frac{2\alpha}{2} = 2 \cos(i+1)\alpha \cos \alpha$$

Ez azt jelenti, hogy minden c_1 és c_2 valós szám esetén igaz, hogy ha $b_i = c_1 \cdot \sin i\alpha + c_2 \cdot \cos i\alpha$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), akkor

$$(2) \quad b_{i+2} + b_i = 2b_{i+1} \cos \alpha.$$

Válasszuk c_1 -et és c_2 -t úgy, hogy kielégítsék az

$$a_0 = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \quad \text{és az} \quad a_1 = c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha$$

egyenleteket, azaz legyen $c_1 = \frac{a_1 - a_0 \cos \alpha}{\sin \alpha}$ és $c_2 = a_0$. Ekkor a

$$b_i = \frac{a_1 - a_0 \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin i\alpha + a_0 \cos i\alpha \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

sorozat kielégíti a (2) összefüggést, és mivel $b_0 = a_0$ és $b_1 = a_1$, azért minden i -re igaz, hogy $b_i = a_i$. Vagyis a szöcske az i -edik ugrás után

$$(3) \quad a_i = \frac{a_1 - a_0 \cos \alpha}{\sin \alpha} \sin i\alpha + a_0 \cos i\alpha$$

előjeles távolságra van az e és f egyenesek metszéspontjától, páros i esetén az e , páratlan i esetén pedig az f egyenesen. A (3) kifejezésben $a_0, a_1, \cos \alpha$ és $\sin \alpha$ konstansok, ezért ha találunk egy olyan k páros számot, amire minden i esetén igaz, hogy $\sin(i+k)\alpha = \sin i\alpha$ és $\cos(i+k)\alpha = \cos i\alpha$, akkor $a_{i+k} = a_i$, és mivel k páros, azért a két végpont ugyanazon az egyenesen van; tehát ekkor a szöcske legfeljebb k pontba juthat el.

Esetünkben $\alpha = 36^\circ$, ezért $k = 10$ elég teszt a feltételeknek, s ezzel feladatunk állítását bebizonyítottuk.

Dénes Attila (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján