Az $y=x^3$ görbe pontjait egyértelműen jellemezhetjük az abszcisszájukkal. Legyen $\circ$ az a művelet, amely a görbe a és b abszcisszájú A és B pontjai esetén $a\circ b$-nek az $A*B$ pont abszcisszáját felelteti meg. Ekkor a pontokon értelmezett $*$ művelet pontosan akkor asszociatív, ha a valós számokon értelmezett $\circ$ művelet az. Megmutatjuk, hogy $\circ$ éppen az összeadás, amiből feladatunk állítása nyilván következik.

Az AB egyenes egyenlete $a\neq b$ esetén

$$(b-a)(y-a^3)=(b^3-a^3)(x-a),$$

ami rendezés után

$$y=(b^2+ab+a^2)x-b^2a-a^2b \tag{1}$$

alakba írható. Könnyen ellenőrizhető, hogy az (1) egyenlet $b=a$ esetén az $y=x^3$ görbe $(a,\,a^3)$ pontbeli érintőjének az egyenlete. Az (1) egyenletű egyenes és az $y=x^3$ metszéspontjainak abszcisszái kielégítik az

$$x^3=(b^2+ab+a^2)x-b^2a-a^2b$$

egyenletet. Ebben az x-re nézve harmadfokú egyenletben x^2 együtthatója 0, ezért a három gyök összege is 0. Mivel az egyenlet két gyöke a és b, a harmadik gyöke $-(a+b)$. Vagyis a harmadik metszéspont a $\big(-(a+b),\,-(a+b)^3\big)$ pont, tehát az $A*B$ pont az $\big((a+b),\,(a+b)^3\big)$ pont, ami azt jelenti, hogy $a\circ b=a+b$. (Könnyen ellenőrizhető, hogy ez az $a=b$ esetben is érvényes.)

Megjegyzés. Megoldásunkból az is látszik, hogy az $y=x^3+kx$ egyenletű görbére is igaz a feladat állítása.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 12. o.t.) *Terpai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

dolgozatai alapján