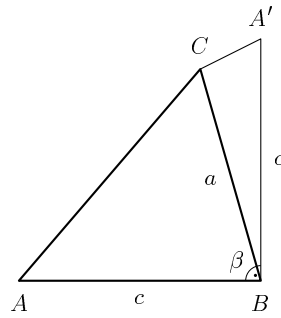


Mivel A és C szerepe a feladatban felcserélhető, azért feltehetjük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású. Legyen $AB = c$, $BC = a$, $\angle C = \beta$, és jelöljük A' -vel A -nak a B körüli -90° -os elforgatottját (*ábra*). Ekkor A' is rácspont, mert ha a \vec{BA} koordinátái (x, y) , akkor a $\vec{BA'}$ koordinátái $(y, -x)$, amik egész számok (mert A is és B is rácspont), s így A' koordinátái is egészek, mert egészek összegeként állnak elő.



Az $A'BC$ háromszögben a koszinusztétel szerint

$$A'C^2 = BC^2 + BA'^2 - 2BC \cdot BA' \cdot \cos(90^\circ - \angle C) = a^2 + c^2 - 2ac \sin \beta.$$

Feltételünk szerint $(a + c)^2 < 8T + 1$, ami a $T = \frac{1}{2}ac \sin \beta$ képletet felhasználva

$$-2ac \sin \beta < \frac{1}{2}(1 - (a + c)^2)$$

alakra hozható. Tehát

$$(1) \quad A'C^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \beta < a^2 + c^2 + \frac{1}{2}(1 - (a + c)^2) = \frac{1}{2}(1 + (a - c)^2).$$

Ám a háromszög-egyenlőtlenség miatt $A'C \geq |BC - A'B| = |a - c|$ – itt egyenlőség is lehet, ha az $A'BC$ háromszög elfajuló –, vagyis $A'C^2 \geq (a - c)^2$. Így

$$(a - c)^2 \leq A'C^2 < \frac{1}{2}(1 + (a - c)^2),$$

amiből kapjuk, hogy $(a - c)^2 < 1$. Ezt az (1) egyenlőtlenségbe visszaírva

$$A'C^2 < \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

adódik. Két rácspont távolsága azonban csak akkor lehet 1-nél kisebb, ha a pontok egybeesnek, tehát $A' \equiv C$.

Vagyis az A -nak B körüli -90° -os elforgatottja C , azaz A , B és C valóban egy négyzet három csúcsa.

Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimm., 12. o.t.)