Megoldás. Az állításnak csak $n \geq 100$ esetén van értelme (ennél kisebb érték esetén $n - 10\sqrt{n}$ negatív), ezért feltehetjük, hogy $n \geq 100$ és $\sqrt{n} \geq 10$.

Az áttekinthetőség kedvéért a megoldást több segédtétel kimondására és bizonyítására bontjuk szét.

I. segédtétel. *Ha az $f(x)$ polinom foka kisebb mint n, akkor*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k) = 0. \tag{1}$$

Bizonyítás. A segédtételt f foka szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha f foka 0, azaz f konstans, értéke c, akkor tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \right) c = (1-1)^n c = 0.$$

Tegyük fel, hogy (1) igaz m-nél kisebb fokú polinomokra. Ebből bebizonyítjuk pontosan m-edfokú polinomokra is. Legyen f egy pontosan m-edfokú polinom. Írjuk fel az indukciós feltevést a $g(x) = f(x) - f(x+1)$ polinomra, n helyére $(n-1)$-et írva. Ezt megtehetjük, mert az $f(x) - f(x+1)$ felírásában az m-edfokú tag kiesik, ezért g legfeljebb $(n-1)$-edfokú.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} g(x+k) = 0.$$

Beírva g definícióját,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} g(x+k) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(f(x+k) - f(x+k+1) \right) =$$

$$= \binom{n-1}{0} f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) f(x+k) - (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} f(x+n) =$$

$$= \binom{n}{0} f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k) + (-1)^n \binom{n}{n} f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+k).$$

Ezzel a segédtételt igazoltuk m-edfokú polinomokra is.

II. segédtétel. *Ha a p és q polinomok fokszámának összege kisebb, mint n, akkor*

$$|p(0)| \leq \frac{\max\left(|q(1)|, \ldots, |q(n)|\right)}{|q(0)|} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k)|. \tag{2}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az I. segédtételt az $f = pq$ polinomra és $x = 0$-ra:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p(k) q(k) = 0.$$

Az első tagot felülről becsülve a többivel,

$$\left| \binom{n}{0} p(0) q(0) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p(k) q(k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k) q(k)|, \tag{3}$$

amiből

$$|p(0)| \leq \frac{1}{|q(0)|} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k) q(k)| \leq \frac{\max\left(|q(1)|, \ldots, |q(n)|\right)}{|q(0)|} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p(k)|.$$

III. segédtétel. *Létezik olyan q polinom, amelyre a következők egyszerre teljesülnek:*

1.*A q foka kisebb, mint $10\sqrt{n}$;*

2.*A $|q(1)|$, $|q(2)|$, $\ldots$, $|q(n)|$ számok mindegyike legfeljebb 1;*

3.$q(0) > 10$.

Bizonyítás. Legyen $m = \left\lceil 10\sqrt{n} \right\rceil - 1$, és legyen T_m az m-edik Csebisev-polinom. Ennek a polinomnak nagyon sok nevezetes tulajdonsága van, ezek közül a következőkre lesz szükségünk:

a) T_m foka pontosan m;

b) Tetszőleges u valós számra $T_m(\cos u) = \cos mu$ és $T_m(\operatorname{ch} u) = \operatorname{ch} mu$;

c) Ha $|x| \leq 1$, akkor $|T_m(x)| \leq 1$.

Válasszuk a q polinomot a következőképpen:

$$q(x) = T_m\left(\frac{n+1-2x}{n-1}\right).$$

Mivel ez a polinom is pontosan m-edfokú, az 1. tulajdonság teljesül.

Az $x \mapsto \dfrac{n+1-2x}{n-1}$ függvény az $1, 2, \ldots, n$ számokat a $[-1,1]$ intervallumba képezi, ezért a c) tulajdonságból következik a 2. tulajdonság.

A $q(0)$ becsléséhez a 2. tulajdonságból tudjuk, hogy

$$q(0) = T_m\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \operatorname{ch}\left(m \cdot \operatorname{ar\,ch}\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Mivel tetszőleges $0 < u < \dfrac{1}{2}$ esetén

$$\operatorname{ch} u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!} < 1 + u^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}^k = 1 + u^2,$$

$$\operatorname{ch}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 1 + \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n-1}, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{ar\,ch}\frac{n+1}{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mivel $m > 10\sqrt{n} - 2 > 9\sqrt{n}$, ebből következik, hogy

$$q(0) > \operatorname{ch}\left(9\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \operatorname{ch} 9 > 10.$$

Ezzel a 3. tulajdonság teljesülését is igazoltuk.

Ha a III. segédtétel q polinomját írjuk be a II. segédtételbe, akkor éppen a feladat állítását kapjuk.