Mivel a p polinom folytonos függvény és $p(0)=1>0$, azért $p(-1)\le 0$ esetén a Bolzano-tétel szerint p felveszi a 0 értéket a $[-1,\ 0]$ intervallumon. De p-nek nincs valós gyöke, így $p(-1)=1-a+b-c+1>0$, ahonnan $a+c<b+2<5$. Tehát $(a+c)^2<25$. A zárójelet felbontva és a $2ac\le a^2+c^2$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $ac<6,25$. A $b<3$ feltétel miatt így $abc<18,75$. Ha tehát a, b, c 3-nál kisebb pozitív számok és p-nek nincs gyöke, akkor $abc<18,75$.

Megmutatjuk azt is, hogy abc a $[0;\ 18,75)$ intervallumban minden értéket felvehet. Legyen $a=c=2,5-\varepsilon$ és $b=3-\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha ε a $(0;\ 2,5)$ intervallumon mozog, akkor abc a Bolzano-tétel alapján minden értéket felvesz a $(0;\ 18,75)$ intervallumon.

Most már csak azt kell bizonyítani, hogy ekkor p-nek nincs valós gyöke. Tegyük fel az ellenkezőjét:

$$x^4+(2,5-\varepsilon)x^3+\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right)x^2+(2,5-\varepsilon)+1=0.$$

Mivel $x\neq 0$, oszthatunk x^2-tel:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+(2,5-\varepsilon)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0.$$

Átalakítva:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(2,5-\varepsilon)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint $x+\dfrac{1}{x}$ értékére

$$\frac{\varepsilon-2,5\pm\sqrt{\varepsilon^2-3\varepsilon+2,25}}{2}$$

adódik. A gyökjel alatt $(\varepsilon-1,5)^2$ áll, tehát $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$ vagy $x+\dfrac{1}{x}=\varepsilon-2$.

Mindkét egyenletet megszorozva x-szel olyan egyenleteket kapunk, amelyeknek nincs valós gyöke. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Szabadka Zoltán (Veszprém, Lovassy L. Gimn., 12. o.t.)