

Ha  $x^2 - xy + \frac{p+1}{4}y^2$  osztható  $p$ -vel, akkor a 4-szerese is  $p$ -vel osztható:

$$p \mid 4x^2 - 4xy + (p+1)y^2 = (2x-y)^2 + py^2.$$

Így  $2x - y$  is osztható  $p$ -vel, azaz van olyan  $r$  egész szám, amelyre

$$(1) \quad 2x - y = pr.$$

Legyen  $v = r$  és  $u = x - \frac{r(p-1)}{2}$  ( $p$  páratlan prím, ezért  $\frac{p-1}{2}$  és így  $u$  is egész). Ekkor (1) figyelembevételével

$$p \left( u^2 - uv + \frac{p+1}{4}v^2 \right) = \frac{p}{4}(4u^2 - 4uv + (p+1)v^2) = \frac{p}{4}((2u-v)^2 + pv^2) = \frac{p}{4}((2x-rp)^2 + pr^2) = \frac{py^2}{4} + \frac{(2x-y)^2}{4} = x^2 - xy + \frac{p+1}{4}y^2.$$

*Fehér Lajos Károly* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. o.t.)