$$A=5^{12}+2^{10}=5^{12}+2^{10}+2\cdot(5^6\cdot 2^5)-2\cdot(5^6\cdot 2^5)=(5^6+2^5)^2-5^6\cdot 2^6==(5^6+2^5-5^3\cdot 2^3)(5^6+2^5+5^3\cdot 2^3).$$

A szorzat második tényezője nyilván nagyobb 1-nél. Belátjuk, hogy $5^6+2^5-5^3\cdot 2^3>1$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt ugyanis

$$5^6+2^5\geq 2\sqrt{5^6\cdot 2^5}=\sqrt{2}\cdot 5^3\cdot 2^3,$$

így

$$5^6+2^5-5^3\cdot 2^3\geq 5^3\cdot 2^3(\sqrt{2}-1)>1.$$

Tehát az A felírható két, 1-nél nagyobb egész szám szorzataként, azaz összetett szám.

Teljesen hasonló módon bizonyítható, hogy $a^{4k}+2^{4m+2}$ mindig összetett szám, ha a, k és m pozitív egészek:

$$a^{4k}+2^{4m+2}=\left(a^{2k}+2^{2m+1}-a^k2^{m+1}\right)\left(a^{2k}+2^{2m+1}+a^k2^{m+1}\right).$$

Veres Péter (Székelyudvarhely, Tamási Á. Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. Mivel a szorzat első tényezője 5-tel osztva 2 maradékot ad, így azonnal adódik, hogy nem lehet 1.

2. A feladatban a közismert x^4+4y^4 szorzattá alakítása van elrejtve.